PRIMERA EDICION

Portada
Biografía
Créditos
Dedicatoria
Contenido
Capítulos
Contra Portada

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL TRANSPORTE

MANUEL E. CORTÉS CORTÉS
MILTON MARIDUEÑA ARROYAVE
WASHINGTON MARTÍNEZ GARCÍA

UNIVERSIDAD DE GUAYAQUIL

Portada

PRIMERA EDICIÓN

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL TRANSPORTE

MANUEL E. CORTÉS CORTÉS
MILTON MARIDUEÑA ARROYAVE
WASHINGTON MARTÍNEZ GARCÍA

Portada

PRIMERA EDICIÓN

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL TRANSPORTE

MANUEL E. CORTÉS CORTÉS
MILTON MARIDUEÑA ARROYAVE
WASHINGTON MARTÍNEZ GARCÍA

Portada

La Programación Lineal y el Transporte

Primera Edición, Mayo 2016

Autor: Manuel E. Cortés Cortés
Co- autores: Milton Maridueña Arroyave,
Washington Martínez García

REVISIÓN TÉCNICA
Raúl Alpizar Fernández
Doctor en Ciencias de la Educación
Universidad de Cienfuegos

María de Lourdes Bravo Estévez
Doctora en Ciencias Pedagógicas
Universidad de Cienfuegos

Domingo Curbeira Hernández
Doctor en Ciencias Pedagógicas
Universidad Cienfuegos

El Telégrafo EP

Edición
Cuidado Editorial
Diseño y Diagramación
Impresión

Derecho del autor emitido por el Instituto Ecuatoriano de Propiedad Intelectual - IEPI, el 11 de mayo de 2016. Registro No.: GYE-007225 Cámara Ecuatoriana del Libro - ISBN: 978-9978-59-112-3

Guayaquil-Ecuador 2016

Portada

CONTENIDO

Portada

PRÓLOGO

La Programación Lineal, que comienza a ser estudiada en los siglos XVII y XVIII con Newton, Leibniz, Lagrange y Bernoulli, viene a ser realmente planteada en 1947 con J. B. Dantzig, quien la formuló en términos específicos y propuso su Método Simplex que es aplicado aún en nuestros días y seguirá aplicándose hasta un futuro no muy cercano. La Programación Lineal es uno de los pilares fundamentales de la llamada matemática aplicada y sus planteamientos abarcan la gran mayoría de las aplicaciones de la matemática a la producción, la economía y los servicios, entre otros. Algunos de los problemas que pueden ser abordados por la Programación Lineal son: los problemas de análisis de la producción, los problemas del transporte, la asignación de recursos, la localización de plantas, las aplicaciones a las inversiones, los problemas de dieta, la teoría de cortes, la formación de mezclas, la teoría redes, la ruta crítica, la teoría de inventarios, la planificación, las aplicaciones a la economía, la teoría de la decisión y otros muchos más.

La programación del transporte es una técnica muy difundida en nuestros días; con ella se logra hacer distribuciones o entregas óptimas desde empresas productivas hasta empresas de comercialización. El problema se plantea aquí como un caso particular de la Programación Lineal, de forma que se satisfagan las demandas, se cumplan los planes de entrega de las ofertas y se minimicen los costos de la transportación.

En el libro se trata el tema de la Programación Lineal en forma general y la programación del transporte en particular, se proponen los temas en una forma metodológica y práctica para que el lector vea de forma inmediata el problema, la aplicación, la solución y el análisis del mismo. En lo referente a la Programación Lineal se abarca, primero: la formulación del problema, la definición de las variables, la definición de las restricciones y la función objetivo a ser optimizada. Segundo: los métodos de solución, la fórmula de cálculo, sus pasos y su operatoria en general, la interpretación de los resultados. Tercero: los métodos de planteamiento y solución más modernos de la Programación Lineal multiobjetivo. Cuarto: Se plantean ejercicios resueltos y propuestos.

Portada

El libro se divide en diferentes partes: primero se plantea el problema clásico de la Programación Lineal y lineal multiobjetivo. Segundo: se trata el problema del transporte como caso particular de la Programación Lineal. Tercero: se analizan las técnicas de solución inicial y de solución óptima de los modelos de transporte. Cuarto: se estudian los modelos de redes, el flujo máximo y el flujo máximo de costo mínimo, más llamado modelo de transporte con trasbordo. Quinto: se dan ejemplos resueltos y propuestos.

La Programación Lineal y la programación del transporte se estudian en una amplia gama de carreras de la Universidad: Licenciatura en Matemática, Ingeniería Informática, Licenciatura en Cibernética Matemática, Licenciatura en Economía, Licenciatura en Contabilidad, Ingeniería Industrial entre otras, por lo que la presente obra puede servir de texto básico para los temas que estudia o texto complementario por las técnicas que presenta y las metodologías para abordarlas, así como los ejercicios prácticos que se resuelven o los que se proponen para el trabajo independiente.

La obra constituye un buen material de estudio para estudiantes de pregrado y postgrado en los temas de la Programación Lineal y sus métodos de solución y la programación del Transporte sus principales métodos para la resolución de ejercicios.

1 Capítulo
2 Capítulo
3 Capítulo

1

PROGRAMACIÓN LINEAL

Portada

Capítulo 1. Programación Lineal

1.1. Introducción

En esencia la Programación Lineal típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (es decir, óptima). Puede surgir este problema de asignación siempre que deba seleccionarse el nivel de ciertas actividades que compitan por recursos escasos necesarios para realizar esas actividades.

La Programación Lineal usa un modelo matemático para describir el problema de interés. El adjetivo "lineal" significa que requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean funciones lineales. La palabra "programación" no se refiere aquí a la programación de computadoras; más bien, es esencialmente un sinónimo de planificación.

Por tanto, la Programación Lineal comprende la planificación de actividades para obtener un resultado "óptimo", es decir, un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma (según el modelo matemático) entre todas las alternativas factibles.

1.1.1. Breve introducción Histórica

Ya en los siglos XVII y XVIII Newton, Leibniz, Lagrange y Bernoulli trabajaban en problemas óptimos condicionados que desarrollaron el cálculo infinitesimal y el cálculo de las variaciones. Algunos estudiosos plantean que en principio era posible aplicar los métodos generales de optimización, en la teoría de los multiplicadores de Lagrange, por ejemplo en los problemas de programación matemática.

Posteriormente el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos Programación Lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual Programación Lineal. En este año, el matemático ruso Leonidas Vitalyevich Kantarovitch publica una extensa monografía titulada "Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción" en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, Programación Lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y Kantarovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de problema de Koopmans-Kantarovitch. En 1945 G. Stigler plantea un problema particular, el de régimen alimentario optimal. En 1947, el problema general de Programación Lineal se formuló en términos matemáticos precisos por G. B. Dantzig. El término Linear Programming aparece por primera vez en una publicación del propio Dantzig. En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la Programación Lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, G. B. Dantzig formula en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar que cabe reducir todo problema de Programación Lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del United States Departament of Air Force, formarían el grupo que dio en denominarse SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la Programación Lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela Graduada de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology, con Charnes y Cooper.

Respecto al método del Simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en el año 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER, con ayuda de varios modelos de ordenador de la firma IBM.

Portada

Los fundamentos matemáticos de la Programación Lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro Janos von Neumann (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de Programación Lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la Universidad de Princenton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesen paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la Programación Lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador Strena en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Se ha estimado, de una manera general, que si un país subdesarrollado utilizase los métodos de la Programación Lineal, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10 y un 15% en tan solo un año.

La Programación Lineal hace historia: el puente aéreo de Berlín

En 1946 comienza el largo período de la Guerra Fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa Guerra Fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4.500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8.000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la Programación Lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo.)

Portada

1.2. Formulación del problema de Programación Lineal

La Programación Lineal concierne a la solución de un tipo de problema especial, en el cual todas las relaciones entre las variables son lineales o en la función a ser optimizada.

El problema general de la Programación Lineal (PL) puede ser descrito como sigue:

Dado un conjunto de m inecuaciones lineales o ecuaciones con n variables, se desea encontrar valores no-negativos de esas variables las cuales satisfagan el conjunto de restricciones y maximicen o minimicen una función lineal de las variables.

Matemáticamente:
Sean $xi >= 0$ $i=1,\ldots, n$ (variables no negativas) (1)

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n \{<=>\}\ b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n \{<=>\}\ b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
am_1\, x_1 + am_2\, x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\, x_n \{<=>\}\ b_m
\end{array}
\qquad (2)
$$

que maximizan o minimizan la Función Objetivo

Máx
o $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$ (3)
Mín

Notaciones: (1)= restricciones de no negatividad
(2)= sistema de restricciones
(3)= función objetivo
x_i = variable y (incógnitas del sistema)
a_{ij} = coeficientes tecnológicos (normas) de la restricción i-ésima y la variable j-ésima
C_j = coeficiente de la función objetivo o costes de xi
b_j = coeficientes o términos independientes
{<=>}= signos de las restricciones que en cada caso debe ser <=, >= o =

Portada

Se llama solución del problema de PL al conjunto de valores que tomen las variables x_i de forma tal que se satisfaga el conjunto (2) o sistema de restricciones, es decir, que se satisfagan todas las inecuaciones del sistema.

Se llama solución factible del problema de PL aquella que cumpla que todas sus variables son positivas. Es decir, una solución factible es cuando el conjunto de valores de las variables satisfacen a (1) y (2) simultáneamente.

Se llama solución factible óptima a toda solución que optimice la función objetivo (3).

1.2.1. Supuestos de la Programación Lineal

La Programación Lineal puede ser aplicada en una gran variedad de problemas; sin embargo, tiene ciertas limitaciones que debilitan su aplicabilidad, entre otras estas pueden ser:

- La proporcionalidad:

Una primera limitación de la Programación Lineal es el requerimiento de que la función objetivo y cada restricción deben ser lineales. Esto requiere que la medida de la efectividad y los recursos utilizados deben ser proporcionales al nivel de cada actividad (variable) conducida individualmente.

Los problemas de programación no lineal carecen de dicha proporcionalidad, aunque en ocasiones es posible resolver estos con PL; esto se presenta en casos especiales, no constituyendo una regularidad.

- Aditividad:

Suponer que la medida de efectividad y cada recurso usados son directamente proporcionales al nivel de cada actividad individualmente no garantiza suficientemente la linealidad. Es necesario que la actividad sea aditiva con respecto a la medida de efectividad y cada recurso utilizado. En otras palabras, la medida total de efectividad y cada recurso total se obtiene de la suma de las efectividades o de los recursos utilizados individualmente.

- Divisibilidad:

La solución óptima de un problema de PL debe tener valores reales de las variables; es decir, que si una variable de decisión debe tener un valor entero, entonces la PL no garantiza esta solución, dado que al aproximar o truncar la solución real para hacerla entera la nueva solución puede no ser la óptima.

- Determínística:

Todos los coeficientes en el modelo de PL (aij , bj y ci) son asumidos con constantes conocidas. Si el modelo de PL servirá para predecir condiciones futuras, los coeficientes utilizados deberán ser calculados sobre la base de predicciones futuras.

En términos generales la PL incluye los siguientes aspectos de interés para nuestro estudio:
a) el planteamiento del problema.
b) la solución gráfica (a modelos de 2 variables).
c) la solución analítica.
d) el análisis de post-optimalidad.

Analizaremos ahora el paso de la Construcción del Modelo para un problema de PL.

1.2.2. Planteamiento de Problemas

Para construir un modelo de PL deben seguirse los siguientes pasos:

Paso 1: Definición de las variables.
Paso 2: Construcción del Sistema de Restricciones.
Paso 3: Construcción de la Función Objetivo.

- Definición de las Variables de Decisión:

Una variable de decisión es la representación de cada una de las actividades que conforman el problema.

Al definir una variable de decisión deben tenerse en cuenta dos definiciones:

- Definición Conceptual

Con esta definición se determina la actividad (o variable) en el contexto del problema, logrando que esta actividad sea independiente. Para ello se deben tener en cuenta los principios de:

a-unicidad de origen.
b-unicidad de destino.

c-unicidad de estructura tecnológica.
d-unicidad de coeficiente de coste.

a, b, c y d se refieren a que cada actividad sea única en su origen, su destino, su tecnología y el valor que se le asigne a la función objetivo.

- Definición Dimensional

Esta definición se refiere al aspecto cuantitativo de la actividad, es decir, la selección de la unidad de medida que se va a representar en el modelo.

- Construcción del sistema de restricciones

En cuanto al sistema de restricciones y a cada restricción en particular se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Determinar la limitación o restricción que presupone dicha restricción, analizando el signo de la misma {<,=,>}, la dimensión física y el valor del término independiente bi.

Paso 2: Determinar las variables que entran en la restricción.

Paso 3: Determinar el valor particular del coeficiente tecnológico de dicha restricción y en cada variable del problema (j=1,n), esto es, aij.

- Construcción de la Función Objetivo:

La función objetivo es la expresión del propósito u objetivo final que deseamos alcanzar al resolver el problema.
En la función objetivo deben aparecer las variables del problema multiplicadas por su coeficiente de costos Cj, el cual debe estar determinado adecuadamente.

Algunos problemas que resuelve la PL son:

- Problemas análisis de la producción.
- Transportación de productos terminados.
- Asignación de recursos.
- Inversiones.
- Localización de plantas.
- Inventarios.
- Problemas relacionados con redes.
- Problemas de mezcla.
- Problemas de dieta.

Portada

- Problemas de corte de materiales.
- Ruta crítica.
- Otros.

1.2.3. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1: Planteamiento de Problemas de PL
A finales del año 1955 el gobierno Francés se enfrentó ante un problema de selección de fuentes de energía para la producción de electricidad.

Se contaba en aquel momento con plantas para la producción de energía tales como:

1- plantas térmicas.
2- plantas de derivación.
3- plantas con presas de almacenamiento.
4- plantas con esclusas.
5- plantas con mareomotriz.

La potencia máxima garantizada, medida por horas de consumo en horas hábiles, era de 1.692 mega watts.

La potencia máxima, medida por hora de consumos en las 4 horas de máximo consumo diario, era de 2.307 mega watts.
La energía anual 7.200 macro-watts/hora.

PLANTAS TIPO.	POTENCIA GARANTIZADA MEGA-WATTS	POTENCIA MÁXIMA MEGA-WATTS	ENERGÍA ANUAL MACRO-WATTS/HORA	INVERSIÓN NECESARIA EN MILLONES DE DÓLARES	GASTOS EN MILLONES DE DÓLARES
1	1	1,15	7,00	97	136
2	1	1,10	12,60	420	56
3	1	1,20	1,30	130	101
4	1	3,00	7,35	310	104
5	1	2,13	5,47	213	79

Se quería investigar además el límite de las inversiones (fijar la política de inversiones).

Para ello se contaba con la tabla de valores tecnológicos siguientes:

Solución del problema: Planteamiento

Variables del problema:
Sea X_i - número de instalaciones del tipo i a poner en funcionamiento.
$X_i >= 0 \quad (i=1,5)$

Portada

D - Límite de la inversión disponible. (D>= 0)

Restricciones:

Potencia garantizada $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 >= 1.692$
Potencia Máxima $1{,}15\ X_1 + 1{,}10\ X_2 + 1{,}20\ X_3 + 3{,}00\ X_4 + 2{,}13\ X_5 >= 2.307$
Energía anual $7\ X_1 + 12{,}6\ X_2 + 1{,}30\ X_3 + 7{,}35\ X_4 + 5{,}47\ X_5 >= 7.200$
Inversión Disponible $97X_1 + 420\ X_2 + 130\ X_3 + 310\ X_4 + 213\ X_5 >= D$

Valor de la función objetivo:

$$\text{Mín } Z = 136\ X_1 + 56\ X_2 + 101\ X_3 + 104\ X_4 + 79\ X_5$$

Al resolver este problema se podrá saber el tipo y número de plantas a poner en funcionamiento (explotación) en el país, así como el monto de la inversión necesaria para que se cumplan con la potencia garantizada, la potencia máxima y la energía anual que se necesita, pero que esto se haga de la forma más económica.

Debemos notar aquí que aunque este problema ilustra un planteamiento concreto de PL este no lo es en sí, dado que las variables Xi representan variables enteras (sin punto decimal), siendo entonces una aplicación de lo que constituye la Programación en Enteros.

1.3. Métodos de Solución

Para dar solución al modelo de Programación Lineal se han desarrollado varios procedimientos. La vía más simple consiste en la solución gráfica, para el caso de los problemas con dos variables de decisión, lo cual constituye al mismo tiempo su principal limitación. El algoritmo más conocido y probado en todas las instancias es el llamado método Simplex, basado en una rutina algebraica iterativa que permite ir determinando soluciones básicas factibles vecinas a partir de una solución inicial, hasta llegar a la solución óptima deseada. Se conocen algunas variantes de este método, tales como el Simplex mejorado y el Simplex revisado. El procedimiento más actual desarrollado para resolver el modelo de Programación Lineal es el conocido método del punto interior de Karmakar.

En este texto estudiaremos solamente los dos primeros métodos mencionados, los cuales serán formalizados a continuación:

1.3.1. Método Gráfico

1. Representar en el plano de coordenadas los hiperplanos correspondientes a cada restricción del modelo.

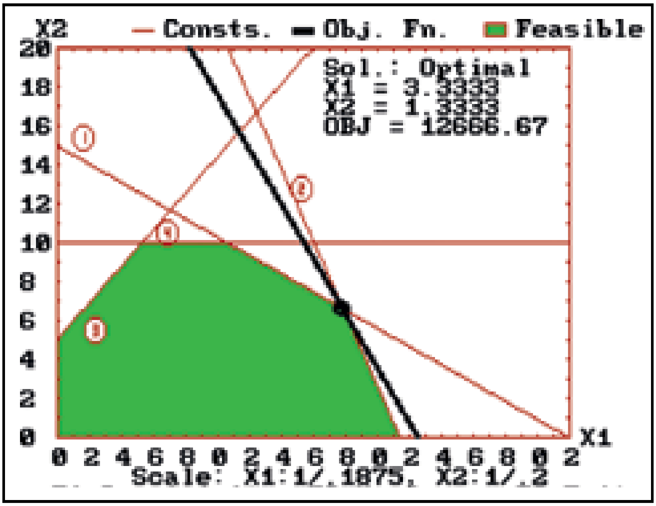
2. Determinar la región factible o conjunto de soluciones factibles por la intercepción de todos los hiperplanos representados.

3. Representar el vector gradiente de la Función Objetivo.

4. La solución óptima del problema se encuentra en el (los) último(s) punto(s) donde se interceptan las líneas de nivel y la región factible en el sentido del gradiente para problemas de máximo y del antigradiente para problemas de mínimos.

5. De la solución del sistema de ecuaciones lineales que se obtiene con las ecuaciones de las restricciones activas (se cortan en el punto de solución óptima) se calculan las coordenadas del (de los) punto(s) y evaluando en la función objetivo se determina el valor extremo deseado.

Ejemplo 2:
Máx $Z = 3.000\ X_1 + 2.000\ X_2$
Sujeto a:
$X_1 + 2\ X_2 \leq 6$
$2\ X_1 + X_2 \leq 8$
$X_2 - X_1 \leq 1$
$X_2 \leq 2$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$



Portada

1.3.2. Método Simplex

1. Llevar el modelo de Programación Lineal original a su forma normal.
2. Construir Tabla Simplex Inicial.
3. Verificar condición de Optimalidad.
4. En caso afirmativo (FIN), de lo contrario ir al paso 5.
5. Determinar variable que entra en base.
6. Determinar variable que sale de la base.
7. Realizar transformaciones en la Tabla Simplex.
8. Ir al paso 3.

Con vistas a la solución del problema es mucho mejor trabajar con sistemas de igualdades (llamado forma normal) que con sistema de desigualdades; es aquí cuando se introduce el concepto de variable de holgura.

Toda restricción del tipo (≥) se puede convertir en una igualdad si le restamos al término de la izquierda una variable de holgura que significa el exceso al límite establecido por el término independiente.
$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{in} X_n - X_n + i = b_i$

$X_n + i$ es la variable de holgura que se resta en la restricción i-ésima ($X_n + i >= 0$)

Toda restricción del tipo (≤) se puede convertir en una igualdad si le sumamos al miembro de la izquierda una variable de holgura que signifique lo que nos faltó para llegar al límite establecido por el término independiente. (Ahorro u ociosidad.)

$a_{j1} X_1 + a_{j2} X_2 + \ldots + a_{jn} X_n + X_n + j = b_j$

X_{n+j} es la variable de holgura que se suma a la restricción j-ésima

$X_j + n >= 0$

De esta forma cualquier problema con restricciones de desigualdad se puede convertir entonces en problemas con restricciones de igualdad (llamado forma normal), el número de variables será entonces de m+n, con lo cual queda explicado cómo ejecutar el paso 1 del procedimiento.

El costo que se le asigna a las variables de holgura será CERO.

Portada

A las restricciones que sean ya una igualdad se les sumará una nueva variable, llamada variable artificial, como premisa para entrar soluciones iniciales al problema. Estas variables artificiales deben ser eliminadas en el proceso de solución, ya que si ellas aparecen en la solución final del problema significan un error.

El objetivo de las variables artificiales es el de formar la matriz unitaria en la solución inicial del problema, cuando existen en el mismo restricciones de igualdad, o de mayor igual, que harían que la variable de holgura respectiva se reste.

El costo de las variables artificiales será muy alto e irá en contra de la Función Objetivo.

El problema de PL cuenta entonces con m restricciones y n variables, con n > m; y si se supone que las restricciones son no redundantes, es decir tal que ninguna restricción sea combinación lineal de las restantes o lo que es lo mismo que las restricciones sean independientes.

Habrá más de una solución al problema, descartando la solución nula que carece de interés. Para poder resolver este problema se tendrá que tomar entonces un número de m variables solamente diferentes de cero y el resto será igualado a cero. A dichas variables (m en total) diferentes de cero se les llama, entonces, variables básicas.

Se llama solución básica a toda solución al problema de PL que posea al menos m variables diferentes de cero. En caso de haber menos de m variables diferentes de cero, se llamará degeneradas a aquellas variables que siendo básicas tengan solución cero. Es decir, una solución básica está en función de m variables diferentes de cero y el resto (n - m) igualadas a priori a cero.

El número total de bases (o de soluciones básicas diferentes) que puede tener el problema será:

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo 3:
Si un problema tiene m = 10 ecuaciones con n = 20 variables, el número de soluciones básicas serían:

C_{10}^{20} = 184.756, entre las cuales habrán soluciones no interesantes al tener valores negativos, o sistemas de ecuaciones particulares que al intentar resolverlos no tendrán solución.

Paso 1. El objetivo de la PL es el de encontrar dentro de un conjunto de enorme de soluciones básicas,

Una solución	**Básica**	**Factible**	**Óptima**
que satisfaga a (2)	que tenga m variables # de ceros	que las soluciones sean positivas satisfagan (1)	que las soluciones optimicen a (3)

Paso 2. Para construir la Tabla Simplex Inicial se debe formar una tabla como la que se presenta a continuación.

Simplex Tableau (Iteración 0)

	Cj	X1	X2	....	Xn	Xn+1	....	Xn+m	
BASE	Cj-B	C1	C2	....	Cn	0	.....	0	RHS
Xb1	Cb1	a11	a12	....	a1n	±1	....	0	b1
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Xbm	Cbm	am1	am2	....	amn	0	....	±1	bm
Zj		Z1	Z2	....	Zn	Zn+1	.....	Zn+m	
Cj-Zj		C1-Z1	C2-Z2		Cn-Zn	Cn+1-Zn+1		Cn+m-Zn+m	

Paso 3. Para verificar la optimalidad es necesario que se cumpla:

En caso de Máximo: Todos los C_j-$Z_j \geq 0$
En caso de Mínimo: Todos los C_j-$Z_j \leq 0$

Paso 4. Determinar la variable que entra en base.

Para elegir la variable que entra en base, X_k, esta se debe elegir tal que cumpla:

Para F.O. de máximo

$$Z_k - C_k = \underset{j}{\text{Mín}} \{ Z_j - C_j < 0 \}$$

Para F.O. de mínimo

$$Z_k - C_k = \underset{j}{\text{Máx}} \{ Z_j - C_j > 0 \}$$

debido a que

Portada

$Z_{nuevo} = Z_{viejo} - \Theta (Z_k - C_k)\ \Theta > 0$

Paso 5. Determinar la variable que sale de base.

Del conjunto de variables básicas elegir aquella que debe salir para dar lugar a la que entro en el paso anterior. Esta variable debe garantizar que al salir la nueva solución básica sea positiva.

Saldrá de base la variable básica X_{br} tal que:

$$\Theta = X_{br} = \min_{i} \{ X_{bi} ; p_{ik} > 0 \}$$

p_{ik} son los valores del vector columna p_k de la variable X_k que entra en la base.

$$pk = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \\ \vdots \\ p_{mk} \end{pmatrix}$$

Paso 6. Realizar transformaciones elementales en la tabla simples.
En la tabla correspondiente del Simplex debe garantizarse que una vez hechos los cambios pertinentes en la base la nueva matriz básica continúa siendo unitaria; para ello se realizan las transformaciones elementales.

La fila r es la del vector que sale (semi pivote). La columna k es la del vector entrante (semi pivote). El elemento ($P_{rk} > 0$) se llama elemento pivote.

Se escribe la nueva tabla con el cambio de la nueva variable básica y se dan los siguientes pasos:
Paso 6.1) Dividir la (fila v) del vector saliente entre el elemento pivote P_{rk}, luego:

$$p_{rj} = p_{rj} / p_{rk} \qquad j = 0, n$$

Paso 6.2) Para las restantes filas hacer las transformaciones.

$$p_{ij} = p_{ij} - p_{ik} * p_{rj} / p_{rk}$$

Una vez calculada la tabla de la nueva iteración (nueva tabla), pasar al Paso 1.

Portada

1.3.3. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 4:
Un comerciante posee una pequeña fábrica de pinturas que produce colorantes para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B, para su fabricación, de los cuales se dispone de 6 toneladas diarias de A y 8 toneladas diarias de B como máximo. Los requisitos de fabricación de ambos colorantes se dan a continuación.

	TON. DE MATERIA PRIMA POR TON. DE PINTURA		DISPONIBILIDAD EN TONELADAS
	EXTERIOR	INTERIOR	
Materia prima 1	1	2	6
Materia prima 2	2	1	8

Un estudio del mercado establece que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de una tonelada. El estudio señala asimismo que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a 2 toneladas diarias. El precio al mayoreo por tonelada es de USD 3.000,00 para la pintura de exteriores y de USD 2.000,00 para pintura de interiores.

¿Cuánta pintura de cada clase debe producir la compañía todos los días para máximizar el ingreso bruto total diario?

Construcción del modelo
1) Definición de las Variables
(¿Qué busca determinar el modelo?)

$X_1 \rightarrow$ Toneladas de pintura para exteriores a producir diariamente.
$X_2 \rightarrow$ Toneladas de pintura para interiores a producir diariamente.

2) Función Objetivo
(¿Cuál es el objetivo o meta que se quiere alcanzar?)

$Máx\ Z = 3.000\ X_1 + 2.000\ X_2$ "Ingreso bruto total diario por la producción de pinturas"

3) Sistema de Restricciones
(¿Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

Portada

$$\begin{array}{rl}
X_1 + 2X_2 \leq 6 & \text{“Disponibilidad de materia prima A”} \\
2X_1 + X_2 \leq 8 & \text{“Disponibilidad de materia prima B”} \\
X_2 - X_1 \leq 1 & \text{“Exceso de pintura interior sobre pintura exterior”} \\
X_2 \leq 2 & \text{“Demanda máxima de pintura interior”} \\
X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 & \text{“Restricciones de no negatividad”}
\end{array}$$

Forma normal del modelo

Máx $Z = 3.000\ X1 + 2.000\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2 + 0\ S_3 + 0\ S_4$

s.a:

$$\begin{array}{l}
X_1 + 2X_2 + S_1 = 6 \\
2X_1 + X_2 + S_2 = 8 \\
X_2 - X_1 + S_3 = 1 \\
X_2 + S_4 = 2 \\
X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0,\ S_4 \geq 0
\end{array}$$

Simplex Tableu (Iteración 0)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj -B	3.000	2.000	0	0	0	0	RHS	Razón
S1	0	1	2	1	0	0	0	6	6
S2	0	2	1	0	1	0	0	8	4
S3	0	-1	1	0	0	1	0	1	X
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	X
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	
	Cj -Zj	3.000	2.000	0	0	0	0		

Solución Incial

X_1=0 S_1=6 Z= 0

X_2=0 S_2=8

S_3=1

S_4=2

Simplex Tableau (Iteración 1)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj -B	3.000	2.000	0	0	0	0	RHS	RAZÓN
S1	0	0	1,5	1	- 0,5	0	0	2	1,3333
X1	3.000	1	0,5	0	0,5	0	0	4	8
S3	0	0	1,5	0	0,5	1	0	5	3,3333
S4	0	0	1	0	0	0	1	2	2
	Zj	3.000	1.500	0	1.500	0	0	12.000	
	Cj -Zj	0	500	0	-1.500	0	0		

Portada

Nueva Solución

$X_1=4$ $S_1=2$ $Z= 12.000$

$X_2=0$ $S_2=0$

$S_3=5$

$S_4=2$

Simplex Tableau (Iteración 2)

	Cj	X1	X2	S1	S2	S3	S4		
BASE	Cj -B	3.000	2.000	0	0	0	0	RHS	RAZÓN
X2	2.000	0	1	0,6666	- 0,3333	0	0	1,3333	
X1	3.000	1	0	-0,3333	0,6666	0	0	3,3333	
S3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
S4	0	0	0	-0,6666	0,3333	0	1	0,6666	
	Zj	3.000	2.000	333,333	1333,33	0	0	12.666,67	
	Cj -Zj	0	0	-333,333	-1333,33	0	0		

Solución Óptima

$X_1=3{,}33$ $S_1=0$ $Z= 12.666{,}67$

$X_2=1{,}33$ $S_2=0$

$S_3=3$

$S_4=0{,}66$

Interpretación

Los valores de X_1 y X_2 indican, según la definición de las variables, que se deben producir 3,33 toneladas de pintura para exteriores y 1,33 toneladas de pintura para interiores, con lo cual se alcanzará un ingreso bruto diario máximo de USD 12.666,67.

Además, las variables de holgura S_1, S_2, S_3, S_4 indican que se agotan las materias primas A y B ($S_1=0$, $S_2=0$), mientras que $S_3=3$ implica que aún se pueden producir 3 toneladas más de pintura interior sin violar la relación entre ellos y finalmente $S_4=0{,}66$ significa que aún se pueden producir 0,66 toneladas más de pintura interior para alcanzar el tope de la demanda máxima esperada.

Ejemplo 5:

Se cuenta con tres fábricas (F-1, F-2 y F-3). Cada fábrica descarga dos tipos de contaminantes (C-1 y C-2) en el río. Se puede reducir la contaminación del río si se procesan los desechos de cada fábrica. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-1, cuesta 15 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-1 reducirá la cantidad de contaminantes C-1 en

Portada

0,10 toneladas y la cantidad de contaminantes C-2 en 0,45 toneladas. El procesamiento de 1 tonelada de desechos de la fábrica F-2, cuesta 10 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-2 reducirá la cantidad de las contaminaciones C-1 en 0,20 toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0,25 ton. El proceso de una tonelada de desechos de la fábrica F-3, cuesta 20 dólares, y cada tonelada de desechos procesados de la fábrica F-3 reducirá la cantidad de contaminaciones C-1 en 0.40 toneladas y la cantidad de contaminaciones C-2 en 0,30 toneladas. El Estado quiere reducir la cantidad de contaminantes C-1 y C-2 en el río en por lo menos 40 (resp. 35) toneladas. Se desea minimizar el costo total de reducir la contaminación en las cantidades deseadas.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

1) Definición de las Variables
(¿Qué busca determinar el modelo?)

X_1 –– Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-1
X_2 –– Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-2
X_3 –– Toneladas de desecho a procesar en la fábrica F-3

2) Función Objetivo
(¿Cuál es el objetivo o meta que se quiere alcanzar ?)

$\text{Mín } Z = 15 X_1 + 10 X_2 + 20 X_3$ “Costo total por procesar los desechos en las fábricas”

3) Sistema de Restricciones
(¿Qué limitaciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las condiciones del sistema que este modelo representa?)

$0{,}10 X_1 + 0{,}20 X_2 + 0{,}40 X_3 \geq 40$ “Reducción del C-1 exigida”
$0{,}45 X_1 + 0{,}25 X_2 + 0{,}30 X_3 \geq 35$ “Reducción del C-2 exigida”
$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0$ “Restricciones de no negatividad”

SOLUCIÓN ANALÍTICA
Método Simplex

Forma normal del modelo

$\text{Mín } Z = 15 X_1 + 10 X_2 + 20 X_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + M_{A1} + M_{A2}$
S.a:
$0{,}10 X_1 + 0{,}20 X_2 + 0{,}40 X_3 - S_1 + A_1 = 40$
$0{,}45 X_1 + 0{,}25 X_2 + 0{,}30 X_3 - S_2 + A_2 = 35$
$X_1 \geq 0 , \quad X_2 \geq 0 , \quad X_3 \geq 0 , S1 \geq 0 , \quad S_2 \geq 0 , A_1 \geq 0 , A_2 \geq 0$

Simplex Tableau (Iteración 0)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj -B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	RAZÓN
1	M	0,10	0,20	0,40	- 1	1	0	0	40	100
2	M	0,45	0,25	0,30	0	0	-1	1	40	133,33
	Zj	0,55M	0,45M	0,70M	-M	M	-M	M	80M	
	Cj -Zj	15-0,55M	10-0,45M	20-0,70M	M	0	M	0		

Solución Incial

X_1=0 S_1=0 Z= 80M

X_2=0 S_2=0

X_3=0 A_1=40

A_2=40

Simplex Tableau (Iteración 1)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj -B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	Razón
X3	20	0,25	0,50	1	- 2,5	2,5	0	0	100	-
A2	M	0,375	0,09	0	0,75	-0,75	-1	1	9,99	13,33
	Zj	5+0,375M	10+0,9M	20	-50+0,75M	50-0,75M	-M	M	2000+9,99M	
	Cj -Zj	10-0,375M	-0,09M	0	50-0,75M	-50+1,75M	M	0		

Nueva Solución

X_1=0 S_1=0 Z= 2.000+9,99M

X_2=0 S_2=0

X_3=100 A_1=0

A_2=9.99

Simplex Tableau (Iteración 2)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj -B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	Razón
X3	20	1,5	0,83	1	0	0	-3,33	3,33	133,33	88,88
S1	0	0,5	0,13	0	1	-1	-1,33	1,33	13,33	26,66
	Zj	30	16,66	20	0	0	-66,66	66,66	2.666,66	
	Cj -Zj	-15	-6,66	0	0	M	66,66	M-66,66		

Nueva Solución

X_1=0 S_1=13,33 Z= 2.666,66

X_2=0 S_2=0

X_3=133.33 A_1=0

A_2=0

Portada

Simplex Tableau (Iteración 3)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj -B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	Razón
X3	20	0	0,43	1	-3	3	0,66	-0,66	93,33	215,38
X1	15	1	0,26	0	2	-2	-2,66	2,66	26,66	100
	Zj	15	12,66	20	-30	30	-26,66	26,66	2.666,66	
	Cj -Zj	0	-2,66	0	30	M-30	26,66	M-26,66		

Nueva Solución

X_1=26,66 S_1=0 Z= 2.266,66

X_2=0 S_2=0

X_3=93,33 A_1=0

A_2=0

Simplex Tableau (Iteración 4)

	Cj	X1	X2	X3	S1	A1	S2	A2		
BASE	Cj -B	15	10	20	0	M	0	M	RHS	Razón
X3	20	-1,625	0	1	-6,25	6,25	5	-5	50	
X2	10	3,75	1	0	7,5	-7,5	-10	10	100	
	Zj	5	10	20	-50	50	0	0	2.000	
	Cj -Zj	10	0	0	50	M-50	0	M		

Solución Óptima

X_1=0 S_1=0 Z= 2.000

X_2=100 S_2=0

X_3=50 A_1=0

A_2=0

Interpretación

La solución óptima alcanzada indica que en la Fábrica-1 no se deben procesar desechos, mientras que se deben procesar 100 toneladas de desecho en la Fábrica-2, y 50 toneladas en la Fábrica-3, para minimizar el costo total que en este caso será de USD 2.000,00

Las variables de holgura S_1=0 y S_2=0 indican que se cumplen las exigencias de disminuir.

1.4. La Programación Lineal y la Multicriterialidad

La Programación Lineal es un método matemático que sirve para optimizar una función llamada objetivo sujeta a una serie de restricciones,

Portada

1. La relación entre las variables debe ser lineal.
2. La función objetivo a optimizar debe ser única.

Estas características se han convertido en los tiempos actuales en desventajas, por cuanto las relaciones que se establecen en los procesos son en raras ocasiones lineales y los objetivos que se persiguen son múltiples más que únicos.

La primera característica (desventaja) puede ser resuelta haciendo cambios de variables o pueden asumirse relaciones lineales con cierto grado aceptable de error.

Estudiaremos cinco formas para resolver la segunda característica (desventaja), la multicriterialidad.

Forma 1. Escoger el criterio más importante
Se tienen p criterios Z_1, Z_2,....Z_p y se toma Z_m como él más relevante, los pasos a seguir serán:

- Incorporar al sistemas de restricciones los restantes criterios en la forma:

  $Z_i \{ > < \} Z_i$ i=1,p; i=m
  cota superior o inferior del criterio investigado.

- Resolver el nuevo problema de PL (con las restricciones incorporadas) considerando como función objetivo la función o criterio Z_m.

  es decir, Máx o Mín Z_m

El problema se convierte a unicriterial.

Desventajas

- Resulta difícil poder escoger un criterio como el mayor de un conjunto de criterios.

- Es poco exacto poder escoger los valores Z_i, como términos independientes.

Forma 2. Método de la Función Ponderada

Formación de un criterio general en forma de función ponderada cuando hay la posibilidad de medir la significatividad de cada criterio.

Se tienen p criterios $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$

- Con la ayuda de un experto se escogen los coeficientes de ponderación de cada criterio, sean estos α^i; $.i=1,n$
- Formar el criterio general $Z = \sum_{i=1}^{b} \alpha^i Zi$ con $\sum_{i=1}^{b} \alpha^i = 1$
- Resolver el problema unicriterial con la función Z antes mencionados.

Desventajas:

- La tarea se convierte en compleja cuando los p criterios no se expresan en una única unidad de medida, e incluso cuando se refieren a diferentes formas de optimizar (máx o mín).
- Es difícil la creación del sistema de coeficientes de ponderación para los diversos criterios.

Forma 3. Método de los pasos sucesivos

Organizar los p criterios en orden de importancia, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$

- Resolver el problema para el 1er. criterio Z_1 (el de mayor importancia), sin tomar en cuenta los criterios restantes. Se obtiene así la solución óptima Z, para el criterio 1.
- Analizar con un experto la posibilidad de disminución del criterio en una cantidad $\beta 1$ (caso de máximo) $Z1 < \beta^1$.
- Incluir la restricción: $Z_1 - \beta^1 < Z^*1 < Z_1$ en el sistema de restricciones
- Resolver el nuevo problema para el criterio Z_2, incluyendo las restricciones c) obteniendo Z_2. Aplicar b) y c) para el criterio 2).
- Repetir los pasos a), b) y c) para los restantes criterios, resolviendo en cada caso el modelo ampliado en las restricciones

pertinentes. De esta forma al resolver el criterio p se tendrá la solución multicriterial del problema.

Desventajas:

- Es un método muy trabajoso y en cada criterio se debe resolver el sistema con una restricción adicional.

- Es necesaria la ayuda de un experto en el sistema para el cálculo de los b_i.

Forma 4. Optimización de Pareto

Deben hacerse todos los puntos extremos del conjunto de puntos extremos de cada solución obtenida según cada criterio y escoger aquellas soluciones en las cuales ningún indicador técnico económico pueda ser mejorado sin el empeoramiento de otro indicador (óptimo de Pareto).

Estas soluciones se le presentan al experto que toma las decisiones, el cual deberá tener la solución óptima más conveniente al sistema. En la literatura especializada este criterio se toma exclusivamente cuando no hay posibilidad alguna de aplicar los criterios anteriores; este es un criterio útil en el plano teórico.

Desventajas:

- Este método se torna extremadamente laborioso al tener que encontrar los puntos extremos de cada uno de los p criterios. En ocasiones es casi imposible el cálculo de los puntos extremos para algunos criterios complejos.

- La labor del experto que toma la decisión se hace muy complejo.

Forma 5. Modelo de programación objetivo [Goal Programming Model] o por meta

Se tiene el siguiente problema de PL multiobjetivo:

F.O.$_1$

$$\begin{matrix}\min \\ \text{o} \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i^1 X_i$$

Portada

F.O.$_2$

$$\begin{matrix}\min \\ o \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 X_i$$

F.O.$_K$

$$\begin{matrix}\min \\ o \\ \max\end{matrix} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} C_i^k X_i$$

$X_i > 0 \quad i=1,n$

Sujeto a las restricciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i \{<, =, >\} B_j \quad j = 1, m$$

1. Se resuelve el problema de PL mono objetivo con cada una de las k funciones objetivas y se tiene la siguiente notación

b_j - valor óptimo del objetivo j (j = 1,k)
$-d_j$- sub-evaluación del objetivo j
$+d_j$- sobre evaluación del objetivo j
W_j- factor peso para $-d_j$ y $+d_j = b_j - L_j$

donde L_j = peor valor posible para el objetivo j

- mínimo valor (límite inferior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de máximización).
- máximo valor (límite superior) para el objetivo j (para objetivos del tipo de minimización).

Es decir, se crea la tabla:

OBJETIVO NÚMERO	ÓPTIMO	VALOR PEOR	FACTOR PESO
j	bj	Lj	Wj

2. Se convierte el problema anterior (k problemas individuales de PL) en un problema mono objetivo como sigue:

Minimizar $\sum d_j- + \sum d_j+ \qquad (j= 1,k)$

Portada

Sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^1 X_i + W_1^- d_1^+ - W_1 d_1 = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^2 X_i + W_2^- d_2^+ - W_2 d_2 = b_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^k X_i + W_k^- d_k^+ - W_k d_k = b_k$$

Nuevas restricciones se incrementa una restricción por cada función objetivo del problema de multiobjetividad

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i \{ <, = , >, \} B_j \quad j = 1,m$$

X_i , $-d_j$, $+d_j > 0$

Ventajas:

- Es un método efectivo para lograr de una vez una gradual suavización de cada uno de los objetivos del problema.
- Con trabajar con los valores que da el análisis de sensibilidad para los C_j (peores valores de la F. O.) se puede hacer el análisis para él cálculo de L_j sin necesidad de expertos.

Desventajas:

- Es trabajoso al tener que resolverse por separado cada uno de los objetivos y conformar el nuevo problema global.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j \{ <, = , >, \} B_j \quad j = 1,m$$

- Restricciones de Metas. Tienen relación con las Metas u objetivos propuestos. Para cada meta se añade una restricción del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + d_k- +d_k+ = b_k \qquad k = 1,k \text{ número de metas.}$$

Portada

La omisión de cualquier tipo de variables de desviación en las restricciones de Meta ACOTA la meta en la dirección omitida. Omitir dk- coloca una cuota superior a la meta. Omitir dk+ coloca una cuota inferior a la meta.

1. Función Objetivo: Minimizar las Desviaciones de las Metas.

- Mín $Z = \sum d_k- + d_k+$ Función Objetivo sin prioridad k = 1,k
- Mín $Z = \sum P_k$ [wik (d_k-) + wik (d_k+) Función Objetivo con Prioridad P_k y preferencias W_{ik}.

Forma 6.- Programación Lineal Multiobjetivo: PMO

Planteamiento del Problema:

1. Variables:

- Variables de Decisión. X_i: Variables del Sistema: X_i >=0 (Son las variables propias del problema de PL que se quiere resolver).

- Variables de Desviación. (d_k-), (d_k+) para cada objetivo. Variables de Desviación: $S+_i$ >= 0 (variables que representan las desviaciones por encima de la función objetivo j). $S-_i$ >= 0 (Variables que representan las desviaciones por debajo de la función objetivo j).

d_k- = desviación por exceso de la Función Objetivo k.
d_k+ = desviación por defecto de la Función Objetivo k.

2. Restricciones:

- Restricciones del Modelo. Estructuradas. Son las restricciones que no tienen que ver con las metas.

Las Restricciones de la PMO son también de dos tipos:

- Restricciones del Sistema: Es el sistema de restricciones normal del problema de PL. $A_X \{\blacktriangleleft\blacktriangleright\}$ b

- Restricciones de Metas u Objetivos: Son las restricciones que se obtienen de llevar los objetivos múltiples a restricciones del problema.

Portada

3. *La Función Objetivo Multiobjetivo:*

- La PMO presenta una única función objetivo de mínimo, en donde aparecen solamente las variables de desviación que no son deseadas o que no contribuyen a los objetivos que se persiguen. Esta función puede tener prioridades o dólares para las variables.

$$\text{Mín } Z = \sum P_j^+ S_i^+ + \sum P_j^- S_i^-$$

Ejemplo 6 (de Problema Multiobjetivo):
Una Empresa Electrónica fabrica dos clases de productos, se requieren 15 min. para fabricar el producto 1, 24 min. para fabricar el producto 2, contando la empresa con 240 horas semanales. Las utilidades de los productos son de USD 4 para el 1 y USD 5 para el 2. El gerente del centro tiene un listado de metas a seguir:

- Meta 1: Alcanzar utilidades semanales de cuando menos USD 4.000.
- Meta 2: Minimizar la cantidad de tiempo extra del centro.
- Meta 3: Sobre cumplir con los pedidos comprometidos de 500 unidades de 1 y 400 unidades de 2.
- Meta 4: Utilizar todas las horas disponibles en horario normal. Plantear el problema de Programación Multiobjetivo.

Plantee el Problema de Programación Lineal Multiobjetivo.

Planteamiento:

Variables de decisión:
X_1.- Ton. a producir del P_1
X_2.- Ton. a producir del P_2

Variables de desviación:
t- , t+ , u- , u+ , S_{x1}- , S_{x1}+ , S_{x2}- , S_{x2}+

Restricciones:
$15\, x_1 + 24\, x_2$ + t- - t+ = 240x 60 = 14.400 min
$4\, x_1 + 5\, x_2$ + u- - u+ = 4.000 utilidades totales USD
X_1 + Sx_1- -S x_1+ = 500 Unidades de P_1
X_2 + Sx_2- - Sx_2+ = 400 Unidades de P_2

Función Objetivo:
Mín Z = u- + t+ + Sx_1- + Sx_2- + t-

Portada

1.5. Ejercicios Propuestos PL y PMO

1.- Una familia campesina es propietaria de 125 acres y tiene fondos por USD 40.000,00 para invertir. Sus miembros pueden producir un total de 3.500 horas-hombre de mano de obra durante los meses de invierno (mediados de noviembre a mediados de mayo) y 4.000 horas-hombre durante el verano. En caso de que se necesite una parte de estas horas hombre, los jóvenes de la familia las emplearán para trabajar en un campo vecino por USD 1,00 la hora durante los meses de invierno y por USD 2,00 la hora en el verano. Pueden obtener el ingreso en efectivo a partir de tres tipos de cosecha y dos tipos de animales de granja: vacas lecheras y gallinas ponedoras. Para las cosechas no se necesita inversión, pero cada vaca requerirá un desembolso de USD 1.200 y cada gallina costará USD 9.

Cada vaca necesita 1,5 acres, 100 horas-hombre durante el invierno y otras 50 horas-hombre en el verano; cada una producirá un ingreso anual neto de USD 1.000 para la familia. Las cifras correspondientes para cada gallina son: nada de terreno, 0,6 horas-hombre en el invierno, 0,3 horas-hombre en el verano y un ingreso anual neto de USD 5. Caben 3.000 gallinas en el gallinero y el corral limita el ganado a un máximo de 32 vacas.

Las estimaciones de las horas-hombre y el ingreso por acre plantado con cada tipo de cosecha son:

OBJETIVO NÚMERO	SOYA	MAÍZ	AVENA
Horas-hombre en invierno	20	35	10
Horas-hombre en invierno	50	75	40
Ingreso neto anual [USD]	600	900	450

La familia quiere determinar cuántos acres debe sembrar con cada tipo de cosecha y cuántas vacas y gallinas debe mantener para maximizar su ingreso neto. Formule y resuelva un modelo de Programación Lineal para este problema. Interprete los resultados obtenidos.

2.- Las estimaciones anteriores del ingreso por acre plantado por cosecha se han hecho suponiendo buenas condiciones del clima. Las condiciones adversas dañarían las cosechas y reducirían mucho el valor resultante. Los escenarios que más teme la familia son: sequía, inundaciones, vientos, sequía y vientos (ambos a la vez) e inundaciones y vientos (ambos a la vez). A continuación se muestran los ingresos por cosecha estimados por la familia para un año bajo estas condiciones.

Portada

ESCENARIO	SOYA	MAÍZ	TRIGO
Sequía	-100	-150	0
Inundaciones	150	200	400
Vientos	500	400	300
Sequía y Vientos	-150	-200	-100
Inundaciones y Vientos	100	100	-50

Realice los ajustes necesarios al modelo anterior y determine la solución óptima para cada escenario. Interprete los resultados obtenidos.

3.- Con la solución óptima para cada escenario, incluyendo el de buen clima, calcule, usando el modelo de cada uno de ellos, el ingreso de la familia al final de cada año si en su lugar ocurriera cada uno de las demás escenarios.

A su juicio, ¿qué solución proporciona el mejor equilibrio entre lograr un valor monetario grande con buenas condiciones y evitar un valor monetario demasiado pequeño bajo condiciones climatológicas adversas?

La familia tiene los datos del clima de varios años anteriores y ha concluido que los escenarios anteriores ocurren según la siguiente distribución estadística.

ESCENARIO	TRIGO
Buen Clima	40%
Sequía	20%
Inundaciones	10%
Vientos	15%
Sequía y Vientos	10%
Inundaciones y Vientos	5%

Con los datos anteriores, determine cuál de las alternativas de decisión sobre siembra y cría anteriormente calculadas realiza el máximo valor esperado para el ingreso familiar.

4.- Una pequeña compañía que produce grabadoras y radios. En la siguiente tabla se dan los costos laborales, los costos de materia prima y el precio de venta de cada producto.

	GRABADORAS (DÓLARES)	RADIOS (DÓLARES)
Precio de venta	100	90
Costo del trabajo	50	35
Costode Materia Prima	30	40

Portada

El 1 de diciembre de 1999, la compañía dispone de suficiente materia prima para producir 100 grabadoras y 100 radios. En la siguiente tabla se muestra el estado de cuentas de la compañía en la misma fecha, para lo que se tiene que la razón (Activo/Pasivo), llamada razón actual de la empresa es de (10.000/10.000)=2.

CUENTA	ACTIVOS (DÓLARES)	PASIVOS (DÓLARES)
Efectivo	10.000	
Cuentas por Cobrar	3.000	
Inventario Pendiente	7.000	
Préstamo Bancario		10.000

Se conoce que la demanda es suficientemente alta como para vender todos los artículos producidos. Sin embargo, todas las ventas se realizan a crédito y el pago por los productos fabricados en diciembre no se recibirá hasta el 1 de febrero del 2000. Durante el mes de diciembre se recibirán USD 2.000 por concepto de cuentas por cobrar, pero se tienen que pagar USD 1.000 al banco del préstamo pendiente y una renta mensual de USD 1.000.

El 1 de enero la empresa recibirá un cargamento de materia prima por un valor de USD 2.000, que se pagará el 1 de febrero del 2000. La gerencia de la empresa decidió que el balance de cajas del 1 de enero del 2000 tiene que ser, por lo menos, USD 4.000. El banco de la empresa exige también que la razón actual al inicio de año sea por lo menos igual a dos.

Para máximizar la contribución a la ganancia de la producción de diciembre (Ingresos por recibir)-(Costos variables de producción), la empresa ha de determinar qué cantidad de radios y grabadoras producir ese mes. Formule y resuelva un modelo de Programación Lineal para este problema. Interprete los resultados obtenidos.

5.- Una empresa de arriendo de vehículos desea establecer la flota de automóviles, camionetas y jeeps para el presente año. Para tales efectos, estudia la adquisición de vehículos de los tres tipos. Todos los vehículos comprados son depreciados y pagados en un período de 2 años, después del cual son vendidos. La tabla siguiente muestra el precio de compra y los ingresos del período para los tres tipos de vehículos (los ingresos para el segundo año incluyen el valor de salvataje).

Portada

VEHÍCULO	COSTO [USUSD]	INGRESOS PRIMER AÑO [USUSD]	INGRESOS SEGUNDO AÑO [USUSD]
Automóvil	7.00	3.000	5.400
Camioneta	6.500	2.300	5.300
Jeep	5.800	2.100	5.000

Aun cuando la empresa puede pagar el costo de los vehículos inmediatamente, puede también decidir diferir parte del costo de los vehículos al final del primer o segundo año. El costo del crédito es de 14% anual.

La empresa debe pagar por lo menos el 20% de la inversión inicial al recibir un vehículo y por lo menos el 50% de la inversión inicial más los intereses del crédito deben haber sido pagados al final del primer año. La empresa dispone de USD 2.000.000,00 para la compra de vehículos este año. La compañía usa una tasa de descuento del 15% para efectos de financiamiento (es decir, USD 100 hoy valen USD 85 dentro de un año). Todo excedente en cualquier año es invertido en otros rubros y, por lo tanto, no puede considerarse en pagos futuros.

Formule un modelo de Programación Lineal para el problema. Interprete los resultados obtenidos.

6.- Una empresa (firma) consultora y auditora A & B ha recibido el pedido de tres nuevos clientes para que los asesore en la realización de auditorías internas. Tomando en cuenta que los contadores de la firma están muy cargados de trabajo, el gerente desea acomodar los nuevos clientes a los cuatro contadores que tienen la menor carga de trabajo en estos momentos. Como los cuatro contadores tienen otros trabajos que realizar, cada uno de ellos podría realizar la asesoría solo a uno de los clientes. La firma desea realizar la selección de forma eficiente, y para ello ha estimado el tiempo que cada uno de ellos tardaría en realizar la asesoría, para lo cual se ha basado en la experiencia y habilidades personales de cada uno de los cuatro contadores. En la tabla que sigue se muestran las estimaciones de tiempo (en horas) hechas por la firma, para cada contador por asesorar a cada cliente.

CONTADOR	CRÍTICOS S.A.	FRUTAS S.A.	AGRO ABC
Rodríguez	150	210	270
Morales	170	230	220
Pérez	180	230	225
Hernández	160	240	230

Portada

La compañía desea asignar un contador a cada cliente, de forma tal que ellos terminen el trabajo en el menor tiempo posible.

Formule un modelo de Programación Lineal para el problema. Interprete los resultados obtenidos.

7. Determinaciones Nutricionales: Como PL:
a) Proporcionar 63.000 miligramos de proteína, 10 miligramos de hierro, 15 miligramos de niacina, 1 miligramo de tiamina y 50 miligramos de vitamina C.

Comidas posibles: espagueti, carne de pavo, papas gratinadas, espinacas y pastel de manzana.

Normas: Cada 100 gramos de estos alimentos la cantidad de cada nutriente se ve en la TABLA

COMIDA/ NUTRIENTE	PROTEÍNA	HIERRO	NIACINA	TIAMINA	VITAMINA C	GRASA
Espaguetti	5.000	1,1	1,4	0,18	0,0	5.000
Pavo	29.300	1,8	5,4	0,06	0,0	5.000
Papas	5.300	0,5	0,9	0,06	10,0	7.900
Espinacas	3.000	2,2	0,5	0,07	28,0	3.00
Pastel de Manzana	4.000	1,2	0,6	0,15	3,0	14.300

Restricciones: No servir más de 300 gramos de espaguetis, 300 gramos de pavo, 200 gramos de papas, 100 gramos de espinaca y 100 gramos de pastel de manzana.
Minimizar la cantidad de grasas.

b) Ahora se le pide plantear el problema como Programación Multiobjetivo:

Ahora se toman en cuenta los costos de los alimentos: USD / 100 gramos espagueti 0,15; pavo 0,80, papa 0,12, espinaca 0,20, Pastel 0,51.

Metas propuestas por el Hospital:
USD 2/comida, no más de 55.000 gramos de grasa.
Penalizaciones. 1 por exceso de cada USD del costo de la comida. 0,09 por exceso de cada milígramos de grasa.

Plantee ahora el problema con los dos objetivos propuestos.

8. Problema de PMO:
Un agricultor tiene 400 hectáreas (ha) de tierra donde puede sembrar maíz, trigo y soya. Cada hectárea de maíz cuesta USD 500 en preparación, requiere 7 días-hombre de trabajo y produce una ganancia de USD 150. Una hectárea de trigo cuesta USD 600 en preparación, requiere 10 días-hombre de trabajo y produce una ganancia de USD 200. Una hectárea de soya cuesta USD 350 en preparación, requiere 8 días-hombre de trabajo y produce una ganancia de USD 100. El agricultor dispone de USD 500.000 para preparación y puede contar con 8.000 días-hombre de trabajo.

Se quiere plantear el problema anterior de forma multiobjetivo con los siguientes objetivos:

a.- Maximizar la utilización de las hectáreas para la siembra.
b.- Disminuir los días-hombres de trabajo.
c.- Obtener la mayor ganancia.

9. Problema de PMO:
El País A quiere desarrollar un proceso de impuestos a sus trabajadores. La base anual de los impuestos sobre propiedad es de millones USD 550. Las bases de impuestos anuales sobre alimentos y medicamentos son de USD 35 y USD 55 millones respectivamente.

Se calcula que el consumo local de gastos de gasolina es de USD 7,5 millones. Se quiere encontrar las tasas de impuestos para la propiedad, los alimentos, los medicamentos y la gasolina de forma que usted plantee el Problema de PMO con las siguientes metas:

a) Los ingresos anuales por impuestos deben ser mayores a USD 16 millones;
b) Los impuestos sobre alimentos no deben exceder el 10% de todos los impuestos recaudados;
c) Los impuestos sobre medicamentos no deben exceder el 20% de todos los impuestos;
d) El impuesto sobre gasolina no puede exceder de los USD 2 millones.

10. Problema de PMO:
Una empresa fabrica 3 productos A, B y C. El tiempo de prensado de cada producto es el siguiente: 5 horas para A, 12 horas para B y 8 horas para C. La empresa cuenta con 340 horas para el equipo de prensado. Las uti-

lidades de los productos son: USD 1.000 para A, USD 1.450 para B y USD 2.500 para C. Las metas que ha fijado la empresa son:

Meta 1: Utilizar toda la capacidad de producción existente.
Meta 2: Sobre cumplir las metas semanales de demanda, 20 unidades de A, 24 unidades de B y 15 unidades de C.
Meta 3: Limitar el tiempo extra a 40 horas.
Meta 4: Obtener Utilidades Máximas de USD 200.000 o más.
Plantee el problema de Programación Multiobjetivo.

Portada

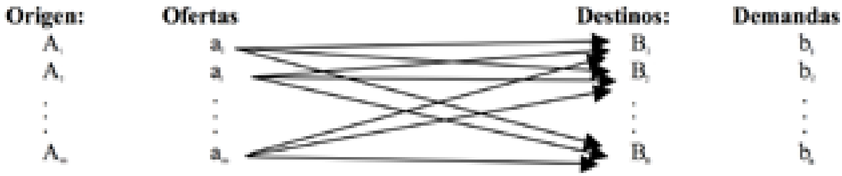
2

PROGRAMACIÓN DEL TRANSPORTE

Capítulo 2. Programación del Transporte

2.1. Formulación del Problema de Transporte

Transportar un único producto homogéneo dado un origen o puntos de embarque hasta n destinos de forma tal que satisfaga las demandas de los destinos, las ofertas de los orígenes y se minimice el costo total de transportación.



Costos de transportación

C_{ij} - costo unitario de transportar del origen i al destino j.

$$O = \text{Oferta Total} = \sum a_i$$
$$D = \text{Demanda Total} = \sum b_j$$

Caso a) Problema en Equilibrio: O = D

Caso b) Problema en Desequilibrio: $O \neq D$

Para resolverlo se necesita crear orígenes o destinos ficticios con costos de transportación cero que asuman la diferencia o déficit y que lleven el problema al caso a.

2.1.1. Planteamiento del Problema

Variables.-

X_{ij}.- Cantidad de unidades a transportar dado el origen i hasta el destino j.

$$X_{ij} >= 0$$

Restricciones.--

Restricciones de orígenes:

$\sum x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \ldots, m$

Portada

Restricción de destino:

$$\sum x_{ij} = b_j, \qquad j = i,\ldots, n$$

Función Objetivo:

$$\text{Mín } Z = \sum \sum x_{ij}\, c_{ij}$$

2.1.2. Ejemplos Resueltos

Ejemplo 7:
Una compañía productora de productos enlatados tiene 3 fábricas de enlatar (1, 2 y 3). Dicha producción se envía por camión a cuatro almacenes de distribución (Almacén 1, Almacén 2, Almacén 3 y Almacén 4). Se quiere hacer un estudio de la transportación con ventas a minimizar los gastos, en la tabla se estiman: la producción de las enlatadoras, las necesidades de los almacenes y los costos de transportación de transporte cargado para cada combinación de enlatadora-almacén. Determine el plan de transportación con mínimo costo.

COSTO DE EMBARQUE POR CAJA		ALMACENES (COSTO POR CAMIÓN CARGADO)				(CARGA DE CAMIÓN)
		1	2	3	4	PRODUCCIÓN
ENLATADORAS	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
ASIGNACIÓN		80	65	70	85	

Planteamiento:

X_{ij}.- Cantidad de cargas por camión que se envían de la enlatadora i al almacén j.

$$X_{ij} >= 0$$

Mín $Z = 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{21} + 955x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34}$

Portada

X11	+X12	+X13	+X14									=75
				+X21	+X22	+X23	+X24					=125
								+X31	+X32	+X33	+X34	=100
X11				+X21				+X31				=80
	X12				+X22				+X32			=65
		X13				+X23				+X33		=70
			X14				+X24				+X34	=85

Solución Óptima:
$X_{11}=X_{13}=X_{23}=X_{24}=X_{31}=X_{32}=0$
$X_{12}=20$ $X_{14}=55$ $X_{21}=80$ $X_{22}=45$ $X_{33}=70$ $X=_{30}$

Mín Z = USD 135.479

Enlatado	1	20 + 55 = 75	Almacén	1	80
	2	80 + 45 = 125		2	20 +45 = 65
	3	70 + 30 = 100		3	70
				4	55 + 30 = 85

Las variables significan las cantidades de carga por camiones que se transportarán desde cada origen hasta cada destino.

Ejemplo 8:
Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1.500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1.000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costes de transporte, en pesetas por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

COSTOS DETRANSPORTE UNITARIOS	TIENDA A	TIENDA B	TIENDA C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

Ejemplo 9:
La Compañía Plantas ABC tiene plantas en las ciudades A, B y C. Sus centros de distribución principales son D_1 y D_2. Las capacidades de las plantas durante el trimestre próximo son 1.000, 1.500, y 1.200 automóviles. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son de 2.300 y 1.400 vehículos. El costo del transporte de un automóvil por tren es de 8 centavos por milla. El diagrama de las distancias recorridas entre las plantas y los centros de distribución son:

Portada

	D1	D2
A	1.000	1.690
B	1.250	1.350
C	1.275	850

Esto produce en costo por automóvil a razón de 8 centavos por milla recorrida. Produce los costos siguientes (redondeados a enteros), que representan a C_{ij} del modelo original: La tabla de transporte será:

COSTOS	D1	D2	OFERTAS
A	80	135	1.000
B	100	108	1.500
C	102	68	1.200
Demandas	2.300	1.400	

2.2. Solución del problema del transporte como técnica particular

El modelo de transporte tiene su técnica particular independientemente de que puede ser tratado como un problema de Programación Lineal, como ya se ha visto anteriormente. Para resolver el modelo de transporte debe plantearse primero la solución básica inicial (métodos de solución inicial) y posteriormente la solución óptima (método de solución Final).

2.2.1. La técnica de transporte: como modelo particular de PL (Método Simplex)

Los pasos básicos de la técnica de transporte son:

Paso 1: Determinar una solución factible inicial. Aplicando uno de los métodos de solución inicial de transporte.

Paso 2: Calcular la variable que entra en la base entre las variables no básicas. Si se cumple la condición de optimidad (del método simplex), detener el proceso; si no ir al paso 3.

Paso 3: Calcular la variable que sale (mediante el uso de la condición de factibilidad) de entre las variables de la solución básica actual; Se aplica el proceso de transformaciones elementales para obtener la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

2.3. Métodos para el cálculo de la Solución Inicial en Problemas de Transporte.

Podemos obtener una Solución Básica Factible inicial (SBF) para un problema de transporte balanceado $\sum O_i = \sum D_j$. mediante el método de la esquina Noroeste, el método de costo mínimo, o el método de Vogel.

2.3.1. Método de la Esquina Noroeste:

El método se basa la ubicación en la esquina superior izquierda del mayor valor posible entre las ofertas del origen y las demandas del destino. El método se plantea en equilibrio, es decir cuando las Ofertas totales son iguales a las demandas totales.
El método se plantea como sigue:

Sea i=1, j=1 la Esquina Noroeste Sean X_{ij}=0 i=1,n; j=i,m:

Paso 1: X_{ij} = Min {Oferta O_i, Demanda D_j}. Al menor entre O_i y D_j se le hace CERO y al Mayor se le resta el menor y se actualizan las ofertas y demandas. Ir al Paso 2.

Paso 2: Continuar el proceso X_{ij} en forma idéntica al Paso 1 para i = i + 1, si la de demanda o la oferta se hace cero se abandona el proceso para esa fila o columna.

Hacer j = j + 1. Ir al Paso 1 si existen valores de las ofertas y demandas diferentes de cero.
En caso contrario se para el proceso.

Los Valores de las casillas X_{ij}, deben incluir (m+n-1) valores diferentes de cero, que representan la solución inicial básica factible; en caso de no ser así se añaden valores ceros a las soluciones hasta tener exactamente m+n-1 soluciones.

2.3.2. Método del Costo Mínimo:

Este método se puede estudiar en tres formas: el método del costo mínimo por filas, el método del costo mínimo por columnas y el método del costo mínimo de la matriz, que es el más importante.

Método del Costo Mínimo por Filas (Columnas):
Este método se basa en ir buscando la solución inicial por la vía del cálculo de la solución mínima por filas (columnas) de la matriz del problema:

Portada

Costo Mínimo por fila. Sean X_{ij}=0 i=1, n; j= i, m
Tomemos i=1 (Mínimo por fila, se inicia en la primera fila):

Paso 1: Buscar la casilla (i,j) en la fila i, con el valor mínimo de los costos C_{ij} para j=1,m
En la casilla (i,j) se toma X_i,j = Mín {Oferta O_i, Demanda D_j}. Al menor entre O_i y D_j se le hace CERO y al Mayor se le resta el menor y se actualizan las ofertas y demandas. Ir al Paso 2.

Paso 2: Si $O_i \neq 0$, buscar el siguiente valor menor de los costos en dicha fila. Ir al Paso 1.

Si $O_i = 0$, Hacer i= i + 1 Ir al Paso 1 mientras i < n+1 en cuyo caso el proceso concluye. Fin.

Los Valores de las casillas X_{ij}, deben incluir (m+n-1) valores diferentes de cero, que representan la Solución Básica Factible inicial; en caso de no ser así se añaden valores ceros a las soluciones hasta tener exactamente m+n-1 soluciones.

El proceso para el costo Mínimo por Columnas es análogo pero haciendo el tratamiento ahora por columnas.

Método del Costo Mínimo de la Matriz:
Este método es más conveniente que los anteriores, en sí es la combinación de ambos. Aquí se van buscando los costos mínimos de la matriz, sin distinción de filas o columnas, se van descontando los valores Oi y Dj respectivamente, tal y como se describe en los métodos anteriores y concluye cuando se hagan cero las ofertas y demandas $O_i = D_j = 0$, i = 1, n; j = 1, m.

2.3.3. Método de Solución Final: (También llamado Método de los Potenciales)

Obtener la solución óptima para un problema de transportes (Métodos de la Solución Final).

Paso 1: Si el problema no está balanceado, balancéelo.

Paso 2: Utilice uno de los métodos descritos anteriormente para obtener una Solución Básica Factible.

Portada

Paso 3: Utilice el hecho de que $U_1=0$, y $U_i+V_j=C_{ij}$ en todas las variables básicas para encontrar $(U_1,U_2...U_m \; V_1,V_2...V_n)$ para la sbf actual.

Paso 4: Si $U_i + V_j - C_{ij}$ es menor o igual a cero para todas las variables no básicas, entonces la SBF actual es óptima. Si no es así se introduce la variable con valor más positivo de $U_i + V_j - C_{ij}$ en la base. Para hacer esto, encuentre un circuito cerrado (se puede demostrar que solamente existe un circuito cerrado) que contiene la variable que entra y algunas de las variables básicas. Después, tomando en cuenta solamente las celdas en el circuito cerrado marque las que se encuentren alejadas en número par (0, 2, 4, 6,...) de celdas de la variable que entra como celdas pares. También marque las celdas en el circuito cerrado, que se encuentra un número impar de celdas de la variable que entra como celdas impares. Ahora encuentre la celda impar cuya variable toma el menor valor. Llame este valor teta. La variable correspondiente a esta celda impar saldrá de la base. Para realizar el pivoteo, disminuye el valor de cada celda impar en teta y aumenta el valor de cada celda par en teta. Los valores de las variables que no se encuentran en el circuito cerrado permanecen sin cambio. Ahora se completó el bloqueo.

Si teta es igual a cero, la variable que entra será igual a cero, y una variable impar que tiene un valor actual de cero, saldrá de la base. En este caso, existía una sbf degenerada antes del pivoteo y resultará después del pivoteo.

Si más de una celda impar en el circuito cerrado es igual a teta. Puede escoger arbitrariamente una de estas celdas impares para que salga de la base; se obtendrá una vez más una SBF degenerada. El pivoteo produce una nueva SBF.

Paso 5: Regrese a los pasos 3 y 4, utilizando la nueva SBF. Para un problema de maximización, proceda como se especificó, pero cambie el paso 4 por el paso 4'.

Paso 6: Si $U_i + V_j - C_{ij}$ es mayor o igual a cero, para todas las variables no básicas, entonces, la sbf actual es óptima. De otra manera, coloque la variable con el valor más negativo de $U_i + V_j - C_{ij}$ en la base mediante el procedimiento de pivoteo.

Portada

Ejemplo 10:
Obtenga una Solución Básica inicial por el método de la Esquina Noroeste en el siguiente problema:

CONTADOR		DESTINOS				
		1	2	3	4	OFERTA
ORÍGENES	1	10 X11	0 X12	20 X13	11 X14	15
	2	12 X21	7 X22	9 X23	20 X24	25
	3	0 X31	14 X32	16 X33	18 X34	5
DEMANDA		5	15	15	10	

Aplicando el algoritmo antes explicado se obtiene:
1. x_{11} = 5, se tacha la columna 1. Por lo tanto, no se puede hacer otra asignación en la columna 1. La cantidad que falta en el renglón 1 son 10 unidades.
2. x_{12} = 10, se tacha el renglón 1 y faltan 5 unidades en la columna 2.
3. x_{22} = 5, se tacha la columna 2 y faltan 20 unidades en el renglón 2.
4. x_{23} = 15, se tacha la columna 3 y faltan 5 unidades en el renglón 2.
5. x_{24} = 5, se tacha el renglón 2 y faltan 5 unidades en la columna 4.
6. x_{34} = 5, se tacha el renglón 3 o la columna 4. Como solo un renglón o una columna se mantienen sin tachar (n+m-1), el proceso llega a su fin.

La solución básica inicial resultante se presenta a continuación.
Las variables básicas son $x_{11} = 5$, $x_{22} =10$, $x_{23} =15$, $x_{24} =5$ y $x_{34} = 5$. Las variables restantes son no básicas en el nivel cero. El costo de transporte asociado es:
$5\ x_{10} +10\ x_0 + 5\ x_7 + 15\ x_9 + 5\ x_{20} +5\ x_{18}$ = USD 410.

	1	2	3	4	
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
	5	15	15	10	

Las soluciones iniciales cumplen m + n – 1 = 6. La regla de la Esquina Noroeste no siempre produce el número adecuado de variables básicas, en este caso da solución no degenerada.
Aplicando el método de los potenciales a la solución inicial dada anteriormente:
$u_1 + v_1 = 10$
$u_1 + v_2 = 0$
$u_2 + v_2 = 7$
$u_2 + v_3 = 9$
$u_2 + v_4 = 20$
$u_3 + v_4 = 18$

Portada

Haciendo $u_2 = 0$ se obtienen los resultados siguientes: $u_1 = -7$, $u_3 = -2$, $v_1 = 17$; $v_2 = 7$; $v_3 = 9$; $v_4 = 20$
se obtiene la tabla de las variables duales siguiente: $u_i + v_j - c_{ij}$:

	V1=17	V2=7	V3=9	V4=20	
U1=-7	10 5-□	0 10+□	20	11	15
U2=0	12	7 5- □	9 15	20 5+□	25
U3=-2	0 +□	14	16	18 5- □	5
	5	15	15	10	

□ = 5 y se obtiene la nueva iteración:

	1	2	3	4	
1	10	0 15	20	11	15
2	12 0	7 0	9 15	20 10	25
3	0 5	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Aplicando nuevamente el sistema de variables duales:

$u_1 + v_2 = 0$
$u_2 + v_1 = 12$
$u_2 + v_2 = 7$
$u_2 + v_3 = 9$
$u_2 + v_4 = 20$
$u_3 + v_1 = 0$

Haciendo $u_1 = 0$ se obtienen los resultados que aparecen en la tabla

	V1=5	V2=0	V3=2	V4=13	
U1=0	10 5-	0 0-□	20 -18	11 +2 +□	15
U2=7	12 0	7 0+□	9 0	20 0-□	25
U3=-5	0 0	14 -19	16 -19	18 -10	5
	5	15	15	10	

□ = 10

Portada

La nueva solución será:

	1	2	3	4	
1	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 10	15
2	$\boxed{12}$ 0	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$	25
3	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	5
	5	15	15	10	

Resolviendo nuevamente el sistema de variables duales:
$u_1+v_2 = 0$
$u_1+v_4 = 11$
$u_2+v_1 = 12$
$u_2+v_2 = 7$
$u_2+v_3 = 9$
$u_3+v_1 = 0$
Haciendo $u_1 = 0$ se obtiene la tabla:

	V1=5	V2=0	V3=2	V4=11	
U1=0	$\boxed{10}$ -	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{20}$ -	$\boxed{11}$ 0	15
U2=7	$\boxed{12}$ 0	11= $\boxed{7}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{20}$ -	25
U3=-5	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{14}$ 0	$\boxed{16}$ -	$\boxed{18}$ -	5
	5	15	15	10	

Y se obtiene la Solución óptima:

$X_{12} = 5$; $X_{14} = 10$; $X_{22} = 10$; $X_{23} = 15$; $X_{31} = 5$; $X_{11} = X_{13} = X_{21} = X_{24} = X_{32} = X_{33} = X_{34} = 0$

Mín Z = USD 216

2.4. Explicación del Método de los Multiplicadores con un Método Simplex

La relación que existe entre el Método Multiplicadores y el Método Simplex se puede establecer demostrando que cpq según se define, es igual directamente a los coeficientes de la función objetivo de la tabla simplex asociada con la iteración actual.

Para mostrar cómo se obtiene el problema dual para el Método del Transporte, considérese primero el caso especial de n=2 y n=3 que se indica en la tabla 6-15. Sean las variables duales u_1 y u_2 para las restricciones de las fuentes y v_1, v_2, y v_3 para las restricciones de los destinos. El problema dual se convierte en:

Maximizar $w = (a_1u_1+a_2u_2) + (b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3)$

Sujeto a:

$u_1 \quad +v_1 \quad <= c_{11}$
$u_1 \quad +v_2 \quad <=c_{12}$
$u_1 \quad +v_3 \quad <=c_{13}$
$u_2 \quad +v_1 \quad <=c_{21}$
$u_2 \quad +v_1 \quad <=c_{22}$
$u_2 \quad +v_3 \quad <=c_{23}$
u_i, u_2, v_1, v_2, v_3, irrestrictas

El problema dual correspondiente esta dado por:

Maximizar $w = \sum m_{i-1}\ a_1\ u_1\ + \sum n\ b_i\ v_j$

sujeto a:

$u_i + v_j <=c_{ij}$ para todas las i y j
u_i y v_j irrestrictas

La evaluación de las variables no básicas se determinan mediante la sustitución de los valores actuales de las variables duales en las restricciones duales, y después tomando la diferencia entre sus miembros primero y segundo. Los valores de las variables duales se pueden determinar observando que las restricciones duales correspondientes a una variable básica se deben satisfacer como ecuaciones escritas.

En realidad en la iteración óptima los multiplicadores producen los valores duales óptimos directamente.

En lo antes expuesto se asigna un valor arbitrario a una de las variables duales que indica que los multiplicadores simplex asociados con una solución básica dada no son únicos. Esto puede parecer inconsistente con los resultados donde los multiplicadores deben ser únicos.

2.4.1. Método de Aproximación de Vogel (VAM) - Método de Solución Inicial

Este método es heurístico y suele producir una mejor solución inicial que los dos métodos antes descritos. De hecho, VAM suele producir una solución inicial óptima, o próxima al nivel óptimo.
Los pasos del procedimiento son los siguientes:

Paso1: Evalúese una señalización para cada renglón restando el menor elemento del costo del renglón del elemento de costo menor siguiente en el mismo renglón.

Paso 2: Identifíquese el renglón o columna con la mayor penalización, rompiendo empates en forma arbitraria. Asígnese el valor mayor posible a la variable con el costo más bajo del renglón o columna seleccionado. Ajústese la oferta y la demanda y táchese el renglón o columna satisfecha. Si un renglón o columna se satisfacen al mismo tiempo, solo uno de ellos se tacha y al renglón restante se le asigna una oferta cero. Cualquier renglón o columna con oferta o demanda cero no debe utilizarse para calcular penalizaciones futuras.

Paso 3:

a.- Si solo hay un renglón o columna sin tachar, deténgase.
b.- Si solo hay un renglón con oferta positiva sin tachar, determínense las variables básicas del renglón a través del método del costo mínimo.
c.- Si todos los renglones y columnas sin tachar tienen oferta o demanda cero asignadas, determínese las variables básicas cero a través del método del costo mínimo. Deténgase.
d.- De lo contrario, calcúlense las penalizaciones de los renglones y columnas no tachados y después diríjase al paso 2.

	1	2	3	4	PR	
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	5	14
PC	5	15	15	10		
	10	7	7	7		

PR = Penalización de Renglón
PC = Penalización de Columna

	1	2	3	4	PR		
1	10	0	20	11	15		11
2	12	7	9 15	20	25	10	2
3	0 5				5	0	-
PC	5 -	15 7	15 11	10 9			

2.5. Ejercicios Resueltos

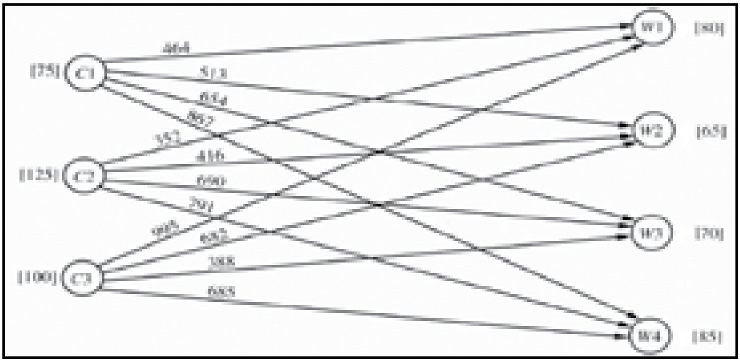
Ejemplo 1:
Una compañía envasa 75, 125 y 100 cajas de guisado en sus unidades "Cannery 1", "Cannery 2" y "Cannery 3" respectivamente, y transporta dicho producto en camiones hacia sus almacenes "Warehouse 1", "Warehouse 2", "Warehouse 3" y "Warehouse 4". Sus 4 almacenes tienen una demanda de 80, 65, 70 y 85 cajas de guisado respectivamente. El costo de transporte por cajas de guisado se muestra en la siguiente tabla. La compañía quiere saber cómo se deben distribuir los envíos de manera que se cumplan las ofertas de envase en sus tres unidades, se satisfaga las demandas de sus 4 almacenes y el costo de transportación sea mínimo.

Tabla con los costos de transportación

	WAREHOUSE 1	WAREHOUSE 2	WAREHOUSE 3	WAREHOUSE 4
Cannery 1	464	513	654	867
Cannery 2	352	416	690	791
Cannery 3	995	682	388	685

Solución

- Grafo asociado al problema.



- Modelación Matemática

Variables de decisión

x_{ij}: Cantidad de cajas de guisado transportadas desde la unidad hasta el almacén j ; $i = 1..3, \quad j = 1..4$

Definiendo el sistema de restricciones

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=75 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=125 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=100 \end{array}\right\rangle \text{Restricciones de Origen} \qquad \left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}=80 \\ x_{12}+x_{22}+x_{33}=65 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=70 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=85 \end{array}\right\rangle \text{Restricciones de Destino}$$

$x_{ij} \geq 0$ Condición de no negatividad

Definiendo la Función Objetivo

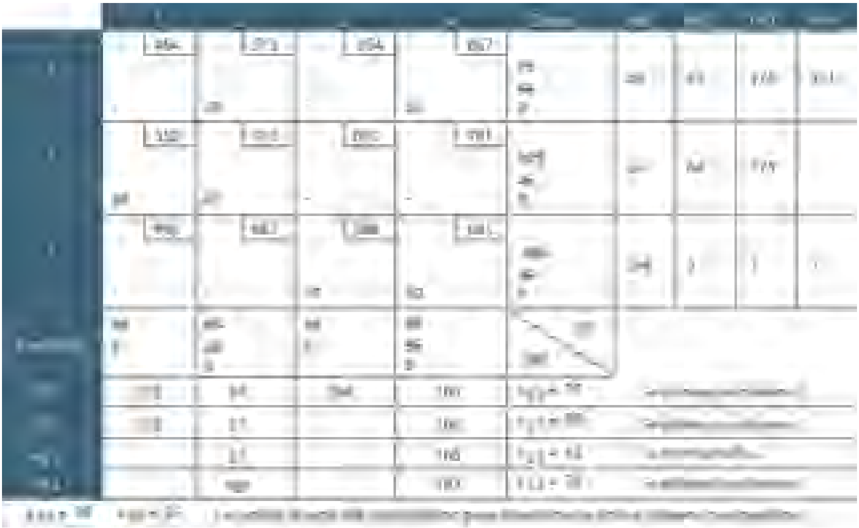
$$\mathbf{min} \rightarrow z = 464x_{11}+513x_{12}+654x_{13}+867x_{14}+352x_{21}+416x_{22}+690x_{23}+791x_{24}+995x_{31}+682x_{32}+388x_{33}+685x_{34}$$

- Aplicando el método de los Multiplicadores

Nota: Como la oferta total $(75+125+100=300)$ es igual a la demanda total $(80+65+70+85=300)$ el problema de transporte anteriormente formulado está bien definido, es decir existe una solución óptima.

- Paso 1. Obtención de una solución básica factible (Método de Aproximación de Vogel).

Portada

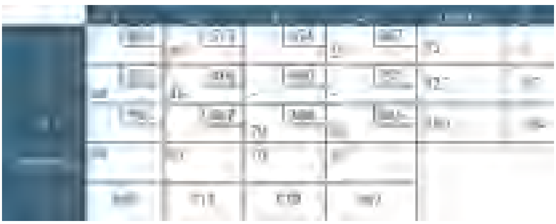


Nota: La solución básica factible obtenida por el Método de Aproximación de Vogel es no degenerada porque $m+n-1=3+4-6=8$ soluciones distintas de 0.

- Paso 2. Determinación de la variable que entra en base. (Iteración 1)

Se determina la solución de sistema (asociado a las variables básicas)

$$\begin{aligned}
u_1+v_2&=513\\
u_1+v_4&=867\\
u_2+v_1&=352\\
u_2+v_2&=416\\
u_3+v_3&=388\\
u_3+v_4&=685
\end{aligned}$$



Se determina de todas las variables no básicas las que cumplan $u_i+v_j-c_{ij}>0$

$$\begin{aligned}
x_{11}&:u_1+v_1-c_{11}=0+255-464<0\\
x_{13}&:u_1+v_3-c_{13}=0+570-654<0\\
x_{23}&:u_2+v_3-c_{23}=-97+570-690<0\\
x_{24}&:u_2+v_4-c_{24}=-97+867-791=173<0\\
x_{31}&:u_3+v_1-c_{31}=-182+255-995<0\\
x_{32}&:u_3+v_2-c_{32}=-182+513-682<0
\end{aligned}$$

Portada

Como ninguna variable no básica cumple con el criterio se ha alcanzado la solución óptima.

Respuesta
x_{ij}: Cantidad de cajas de guisado transportadas desde la unidad hasta el almacén j; $i = 1..3$, $j = 1..4$

2.6. Ejercicios propuestos

- Ejercicio 1.

Una fábrica de piensos compuestos dispone de tres plantas diferentes de fabricación y cinco almacenes para la distribución mensual. Las cantidades fabricadas en cada planta son de 60, 80 y 90 t. al mes. Las cantidades mensuales solicitadas por los almacenes son 20, 60, 80, 40 y 10 t., respectivamente. La matriz de costes por unidad de transporte es:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el precio mínimo de transportar la demanda solicitada al mes?

- Ejercicio 2.

Una empresa dispone de tres almacenes desde donde distribuir sus productos a cuatro tiendas. La distancia en Km desde cada almacén a cada una de las tiendas es:

ALMACÉN/TIENDA	1	2	3	4	DISPONIBILIDAD
1	80	130	40	70	120
2	110	140	60	100	170
3	60	120	80	90	110

Cada tienda necesita 100 productos mensuales. El coste de transporte por producto es de 1.000 u.m. por embarque más 5 u.m. por Km. Resolver por el método de los Multiplicadores usando método de la Esquina Noroeste y Vogel. Comparar ambos resultados.

- Ejercicio 3.

Resolver el siguiente problema de transporte:

	1	2	3	4	5	6	OFERTA
1	5	10	15	8	9	7	30
2	14	13	10	9	20	21	40
3	15	11	13	25	8	12	10
4	9	19	12	8	6	13	100
DEMANDA	50	20	10	35	15	50	

Utilizar Vogel y Costo Mínimo, y comenzar con la SBF de menor valor para la función objetivo.

- Ejercicio 4.

Las tarifas aéreas por t. entre siete localidades son las siguientes:

OFERTA	1	2	3	4	5	6	7
1	-	21	50	62	93	77	-
2	21	-	17	54	67	-	48
3	50	17	-	60	98	67	25
4	62	54	60	-	27	-	38
5	93	67	98	27	-	47	42
6	77	-	67	-	47	-	35
7	-	48	25	38	42	35	-

Cierta empresa debe embarcar un determinado artículo desde las localidades 1, 2, 3 hacia las localidades 4, 5, 6, 7. Deben enviarse, respectivamente, 70, 80 y 50 t. de las tres primeras localidades y deben recibirse, respectivamente, 30, 60, 50 y 60 t. en las cuatro últimas. El transporte puede realizarse a través de localidades intermedias con un coste igual a la suma de los costes para cada una de las etapas del trayecto. Determinar el plan óptimo de transporte (Utilizar Vogel).

- Ejercicio 5.

Cierta compañía posee un centro comercial en cada una de las ciudades 1, 2 y 3. A cada uno de estos centros llegan mensualmente 10 camiones que se envían desde dos centros de distribución A y B, los cuales disponen de 15 camiones cada uno.

El transporte se realiza por carretera pero como el peso de camiones supera el límite permitido por la carretera de acceso desde A hasta la ciudad 3, no hay posibilidad de abastecer el centro comercial de la ciudad 3 desde A.

Portada

Los costes de transporte, por camión, entre los centros de distribución y los centros comerciales vienen expresados en la siguiente tabla:

	1	2	3	
A	5	3	-	
B	6	3	5	u.m.

a) ¿Cómo realizar el transporte para que el coste total sea mínimo?

b) En la ciudad 2, se instala en período experimental un sistema que permite cambiar cada remolque de camión por un vagón de ferrocarril. Desde 2 hacia 1 y 3 se podrá utilizar el transporte por ferrocarril. El centro A decide utilizar este sistema experimental. En principio solo lo utilizaría el centro A pues existe la sospecha de que se ocasionarían retrasos en los envíos. Necesitas tener en cuenta el coste de transporte por ferrocarril desde 2 hasta 1 y 3 que es de 4 u.m. y 1 u.m. por vagón utilizado, respectivamente.

Determinar el número de camiones y vagones que se envían desde cada centro de distribución a cada ciudad, para que el coste del transporte sea mínimo.

c) Una vez comprobado que los retrasos no son excesivos el centro B decide estudiar la posibilidad de utilizar, junto con A, el transporte por ferrocarril. ¿Cómo se modifica el coste de transporte?

- Ejercicio 6.

Una empresa energética dispone de tres plantas de generación para satisfacer la demanda eléctrica de cuatro ciudades. Las plantas 1, 2 y 3 pueden satisfacer 35, 50 y 40 millones de Kw/h respectivamente.

El valor máximo de consumo ocurre a las 2 PM y es de 45, 20, 30 y 30 millones de Kw/h en las ciudades 1, 2, 3 y 4, respectivamente. El costo de enviar 1 Kw/h depende de la distancia que deba recorrer la energía.

La siguiente tabla muestra los costos de envió unitario desde cada planta a cada ciudad. Formule un modelo de Programación Lineal que permita minimizar los costos de satisfacción de la demanda máxima en todas las ciudades.

Desde	Ciudad1	Ciudad 2	Hacia Ciudad 3	Ciudad 4	Oferta (Millones Kwh)
Planta 1	80	130	40	70	120
Planta 2	80	130	40	70	170
Planta 3	80	130	40	70	110
Demanda (Millones Kwh)	80	130	40	70	

2.7. Conclusión

Se han presentado varios métodos para obtener una solución al problema de transporte u otro semejante. Una consideración muy importante que hay que tener en cuenta con cualquier método que se utilice, es que el problema de transporte no siempre puede aislarse y resolverse dentro de sus propios límites. El transporte es tan solo una parte de todo el sistema de distribución de la compañía. Es muy difícil resolver el mejor programa de transporte en términos de servicio y bajo costo. Esa área de la empresa requiere de una constante atención para incorporar los cambios necesarios, y es una difícil tarea para cualquier grupo de investigaciones de negocios.

Modelos de Redes

Los modelos de redes como problemas de optimización son casos especiales de la Programación Lineal. Por lo tanto, son modelos de redes las siguientes aplicaciones:

Problemas de transporte, problemas de redes eléctricas, problemas de comunicación en general, redes hidráulicas, redes de sistemas de información, arboles de decisión, diagramas de flujo, etc.

Con el desarrollo computacional los algoritmos heurísticos y de optimización de solución de redes han cobrado una importancia muy significativa en la solución de problemas de la vida real aplicados a la economía, producción, servicios, administración de empresas, sistemas logísticos, etc.

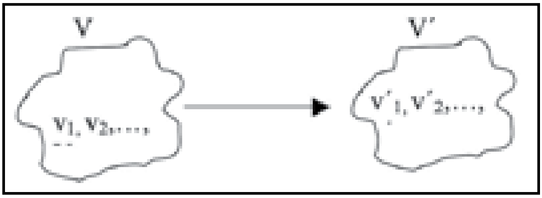
Definición de Red

El concepto de red se transforma en el objetivo principal del análisis de redes. En forma general, se define una red como la representación gráfica de las relaciones entre los elementos de un conjunto de puntos denominados vértices. Algunos autores lo llaman grafo. Un concepto más estructurado desde el punto de vista matemático es el que presentamos a continuación.

Portada

Definición de Aplicación o Función Multívoca

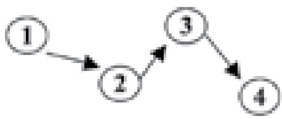
Sea una función F: V → V´, una función que a cada elemento de v ϵ V le hace corresponder ninguno, uno o varios elementos de la imagen v´ϵ V´. Donde los V representan los vértices.



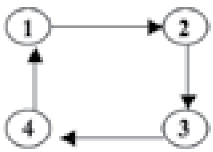
Concepto de Red o Grafo G(N, A): es la representación gráfica de una función multívoca donde N es el conjunto de nodos o vértices de la red y A es el conjunto de arcos o ramas que vinculan los nodos.

Clasificación de las redes:
Redes Orientadas o Dirigidas
Cuando se vinculan dos nodos (i, j) se obtiene un elemento llamado arco. Los elementos (i, j) de este arco A en las redes orientadas poseen una dirección y un sentido.

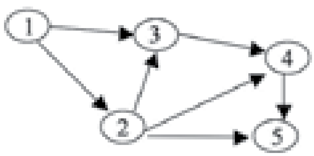
A una sucesión de arcos sucesivos se les llama Camino.



Un camino donde su vértice inicial coincide con su vértice final se llama Circuito.



Ejemplo de Red Orientada.



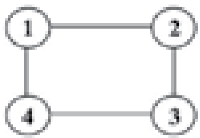
NODOS N = {1, 2, 3, 4, 5}
ARCOS A= {(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (2,5), (4,5)}

Redes no orientadas

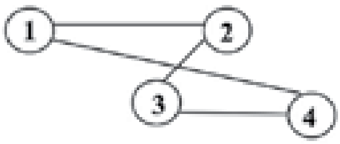
Cuando los elementos (I, J) de A no poseen dirección y sentido se les llama Rama.

A una sucesión de ramas sucesivas se les llama Ruta.

Una ruta donde su vértice inicial coincide con su vértice final se le llama Lazo o Ciclo.



Ejemplo de red no orientada.



Tipos de Redes

Las redes pueden clasificarse en diferentes tipos, pero las más conocidas son:

- Red conexa,
- Árbol, y
- Árbol de expansión.

- *Concepto de Red conexa:* es una red en la cual cada dos nodos diferentes tienen unión por lo menos en una Ruta (redes no orientadas) o un Camino (redes orientadas). No existen nodos aislados.

- *Concepto de Árbol:* existe solo en redes no orientadas, y es una subred conexa que puede incluir solo un subconjunto de nodos de la red y que no forman lazos o ciclos.

- *Concepto de Árbol de expansión:* en una red conexa que puede unir todos los nodos de la red, sin permitir ningún Lazo o Ciclo, pero la suma de sus arcos es un valor mínimo.

Algoritmos en la Teoría de Redes
Un algoritmo es un conjunto ordenado que describe los pasos para la obtención de un objetivo específico. En teoría de redes existen los algoritmos para redes orientadas y para redes no orientadas que veremos más adelante.

Algoritmos para redes no orientadas
Algoritmo de Prim
Es un algoritmo para la obtención de un árbol de expansión mínima para Redes no Orientadas.

Objetivo: unir los nodos de una red no orientada utilizando la longitud más corta de las ramas de conexión.

Pasos

Sea N= {1, 2,..., n} el conjunto de nodos de una red.
C_k: conjunto de nodos que se han conectado permanentemente en la iteración K del algoritmo.
C'_k: conjunto de nodos que todavía se deben conectar permanentemente.

Paso 0: Sea C0=φ ; C'_0=N

Paso 1: Para cualquier nodo i del conjunto de los no conectados haga C_1={i} luego C'_1=N-{i}

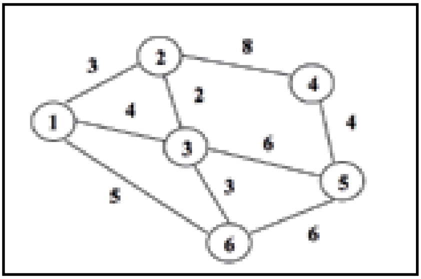
Sea K=2

Paso K: seleccione un nodo j* en el conjunto no conectado C'_{k-1} que produce la rama más corta hacia un nodo en el conjunto conectado C_{k-1}.

Una permanentemente j* con C_{k-1} y elimínelo de C_{k-1}, es decir:
$C_k=C_{k-1}+\{j^*\}$ $\quad$ $C'_{k-1}=C'_k-1-\{j\}$

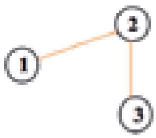
Si el conjunto de nodos no conectados está vacío, deténgase.
De lo contrario establezca K=K+1 y repita el paso.

Ejemplo 13 (de Árbol de Expansión mínima):
Se tienen 6 poblados y se quieren unir por un cable coaxial con mínimo gasto en cable y en la red se escriben los Km de carretera por donde pasaría el cable. Aplique el árbol de expansión mínima.

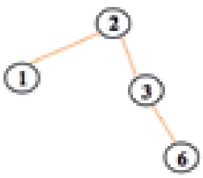


Resolución:
K=0 $C_0 = \{\varphi\}$, $C'0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Seleccionamos K=1 y tenemos $C_1 = \{1\}$ y $C'_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Para K=2
(1, 2)=3 $C_2 = \{1, 2\}$
(1, 3)=4 $C'_2 = \{3, 4, 5, 6\}$
(1, 6)=5



Para K=3
(2, 4)=8 $C_3 = \{1, 2, 3\}$
(2, 3)=2 $C'_3 = \{4, 5, 6\}$



Para K=4
(3, 5)=6 $C_4 = \{1, 2, 3, 6\}$
(3, 6)=3 $C'_4 = \{4, 5\}$

Para K=5
(6, 5)=6 $C_5 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
(3, 5) o (6, 5)=6 $C'_5 = \{4\}$

Portada

Para K=6

(5, 4)=4 C_6= {1, 2, 3, 5, 5, 4}

C'_6= {φ}

Solución

(1, 2), (2, 3), (3, 6), (3, 5) o (6, 5), (5, 4)

El valor de la ruta es = 18

Algoritmo de Kruskal para Árbol de Expansión mínima para Redes no orientadas:

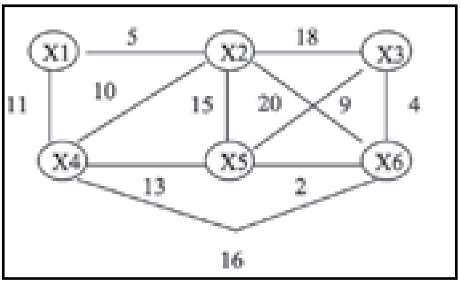
Dada una red no orientada y conexa, seleccione las ramas en forma ascendente.

1) Seleccione una rama cualesquiera del conjunto ordenado.

2) Sea X_i el conjunto de ramas seleccionadas en la iteración i. Se seleccionará la rama (i+1) si y solo si ella no crea algún ciclo en la red parcial X_i + (i+1).

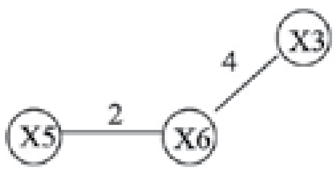
3) Se termina el proceso cuando el número de ramas seleccionadas sea igual a (n-1).

Ejemplo 14:

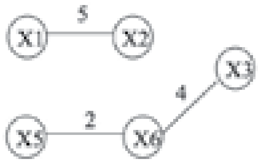


Proceso 1

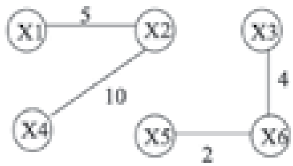
Proceso 2



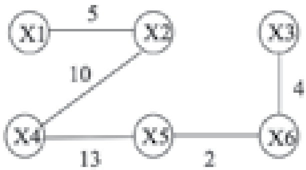
Proceso 3



Proceso 4



Proceso 5



Árbol de expansión mínima:
5+10+13+2+4=34

Algoritmo de Dijkstra de Camino Mínimo para Redes no Orientadas:

Objetivo de la n-ésima iteración: encontrar el n-ésimo nodo más cercano al origen. (Este paso se repetirá hasta que el n-ésimo nodo sea el destino.)

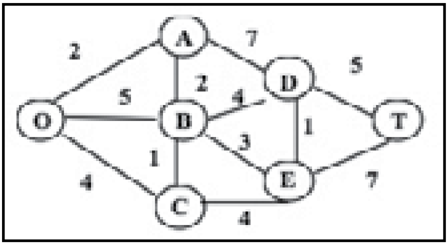
Datos para la n-ésima iteración: n-1 nodos más cercanos al origen (encontrados en las iteraciones previas), incluyendo su ruta más corta y las distancias desde el origen. (Estos nodos y el origen se llamarán nodos resueltos; el resto son nodos no resueltos.)

Candidatos para el n-ésimo nodo más cercano: cada nodo resuelto que está conectado directamente por una ligadura con uno o más nodos no resueltos proporciona un candidato, y este es el nodo no resuelto que tiene la ligadura más corta.

Cálculo del n-ésimo nodo más cercano: para cada nodo resuelto y sus candidatos, se suma la distancia entre ellos y la distancia de la ruta más corta desde el origen a este nodo resuelto. El candidato con distancia total más pequeña es el n-ésimo nodo más cercano.

Portada

Ejercicio Resuelto:



Iteración	Nodo Resuelto conectado a nodo no resuelto	Nodo Resuelto más cercano conectado	Distancia total	n-ésimo nodo más cercano	Distancia mínima	Última conexión
1	0 (inicio)	A	2	A	2	0-A
2	A	B	2+2	B	4	A-B
3	0	C	4	C	4	0-C
4	A B C	D E E	2+7 4+3 4+4	E	7	B-E
5	A B E	D D D	2+7 4+4 7+1	 D D	8	 E-D E-D
6	D E	T T	8+5 7+1	T	13	D-T

Ruta mínima: O-A-B-E-D-T

Valor: 13

Ejercicios Propuestos.

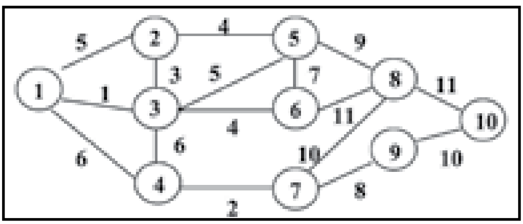
Para las redes mostradas en los ejercicios 1 a 3 encuentre lo siguiente:

a) Dos árboles de la red.

b) Un árbol de expansión mínima (Para Prim y para Kruskal)

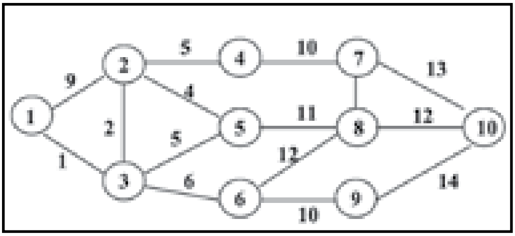
c) Ruta más corta (Dijkstra)

Ejercicio 1:

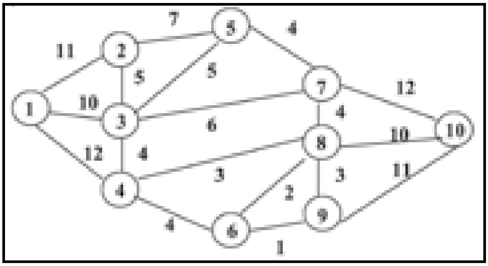


Portada

Ejercicio 2:

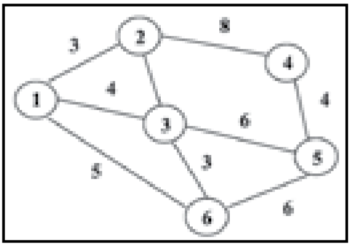


Ejercicio 3:



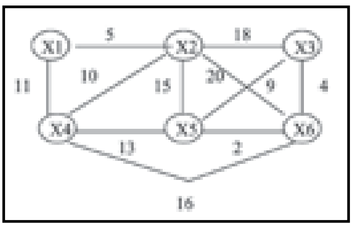
Ejercicio 4:

Se tienen 6 poblados y se quiere calcular el camino de mínimo gasto en Km. En la red se escriben los Km de carretera por donde pasaría el cable. Aplique Dijsktra para encontrar el camino mínimo de 1 a 5.



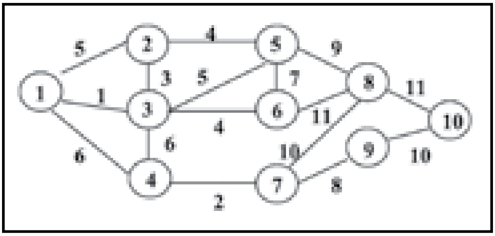
Ejercicio 5:

Se tienen 6 ciudades y se quiere calcular el camino de mínimo gasto en Km. En la red se escriben los km de carretera por donde pasaría el cable. Aplique Dijtrav para encontrar el camino mínimo de 1 a 5.



Portada

Ejercicio 6:
Dada la Red de Caminos desde el Pueblo 1 hasta el 10, encuentre el árbol de expansión mínima.



Algoritmos para redes orientadas

Algoritmo de Ford
El algoritmo de Ford se utiliza en redes conexas orientadas para la obtención del camino de valor Mínimo o Máximo, también llamado de Caminos extremales.

Caso del mínimo
1. Se asigna a todo vértice o nodo j una marca [+,∞_j], excepto al nodo inicial que toma la marca [+, Oo].
2. Se busca un arco (x_i,x_j) tal que $\lambda_i+V(X_i,X_j)<\lambda_j$.

Si tal arco existe, se reemplaza la marca del nodo por [X_i, $\lambda_i+V(X_i,X_j)$]
Se repite el paso anterior hasta que ningún arco permita disminuir las marcas.

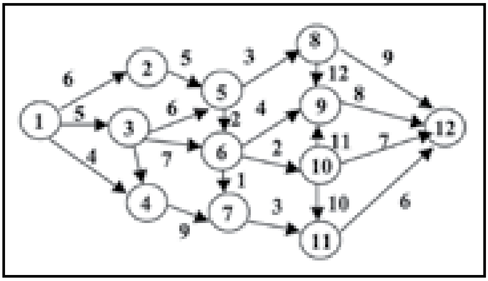
Caso de camino máximo
a) [+,O] para vértice inicial
[+,-∞] para todos los restantes.

b) Se cambia la marca si: $\lambda_i+V(X_i,X_j)>\lambda_j$
La nueva marca sería [X_i, $\lambda_i+V(X_i,X_j)$]

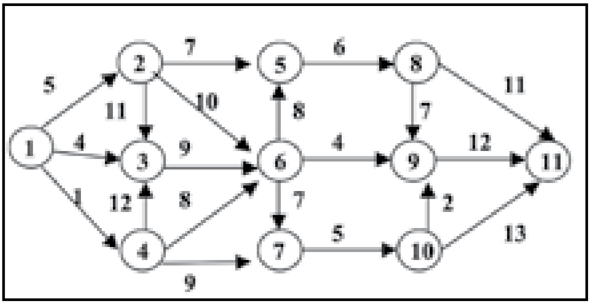
Ejercicios Propuestos de Redes Orientadas

Ejercicio 1:
Encuentre en las siguientes Redes Orientadas:
a) El camino Mínimo.
b) El camino Máximo.

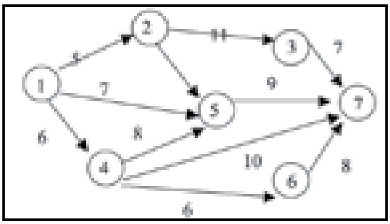
Portada



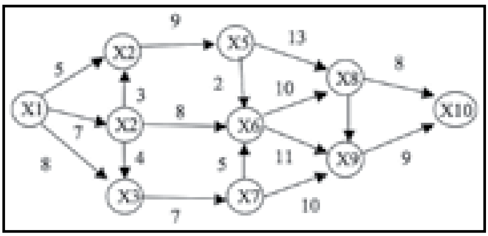
Ejercicio 2:
Encuentre en las siguientes Redes Orientadas:
a) El Camino Mínimo.
b) El Camino Máximo.



Ejercicio 3: Encuentre el Camino Mínimo de 1 a 7 en la red que sigue:



Ejercicio 4: Encuentre el Camino Mínimo de X_1 a X_{10} en la red que sigue:



Algoritmo de Flujo Máximo para Redes Orientadas
Conceptos Básicos:

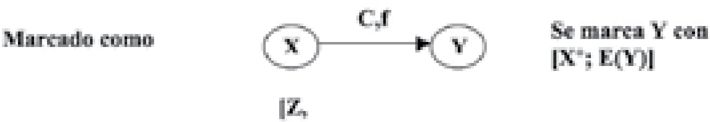
C_{ij}: capacidad del arco.
F_{ij}: flujo del arco.
c_{ij}: costo unitario del arco.

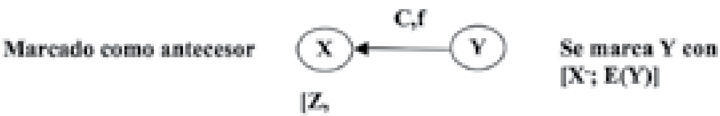
Algoritmo de Flujo Máximo para Redes Orientadas:
Todos los vértices tienen tres estados:

- No marcado.
- Marcado e inexplorado.
- Marcado y explorado.

Rutina 1

a) Inicialmente todos los vértices están no marcados, excepto el vértice inicial, [-,∞] que está marcado e inexplorado.
b) De ahí cualquier vértice marcado e inexplorado se comienza a explorar sus antecesores o sucesores.



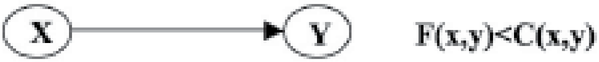


c) Repetir b) hasta que se llegue a una de las siguientes situaciones:

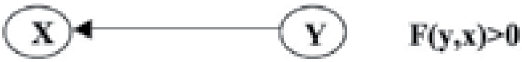
- El vértice final está marcado e inexplorado. Pasar a rutina 2.
- No se pueden asignar más marcas y el vértice final no ha sido marcado. Se obtiene un corte (X, X´) donde:
- X: vértices de la red marcados incluyendo el vértice inicial.
- X´: vértices de la red no marcado incluyendo al vértice final.
- El Flujo Máximo será formado por la suma de los flujos de los arcos de (X, X´) menos la suma de los flujos de los arcos (X´, X).

Rutina 2: Rutina de cambio de flujo
Sea el vértice final marcado con [y+;E(t)], entonces el Nuevo flujo de [y;t] será f´(y;t)=f(y;t)+E(t). Ahora se comienza a estudiar los arcos incidentes de y para hacer el cambio de flujo de ellos.

- Si y está marcado [X+, E(y)] entonces f'(x,y)= f(x,y)+E(t); solo si f(x,y)<C(x,y).



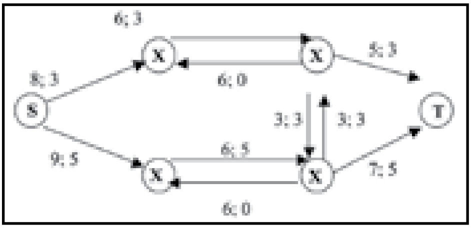
- Si y está marcado como [X-;E(y)] entonces f'(y,x=f(y,x)-E(t)) solo si f(y,x)>0



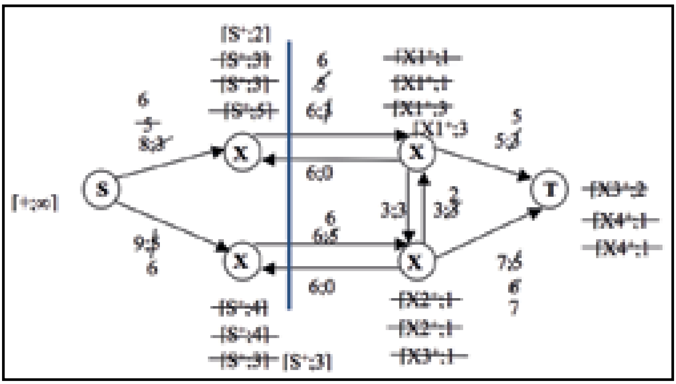
Se continúa la cadena incremental de flujo hasta llegar al vértice de partida.

Ejercicio resuelto de Flujo Máximo

1). Dado la siguiente red de flujos encuentre el Flujo Máximo de S a T.



Marcado 1



Portada

E(t)=2
Cambio de flujo (1) →
E(t)=1

F(x3,t)=3+2=5
F(s,x1)=3+2=5

F(x1,x3)=3+2=5

Marcado 2
Cambio de flujo (2) →

F(x4,t)=5+1=6
F(s,x2)=5+1=6

F(x2,x4)=5+1=6

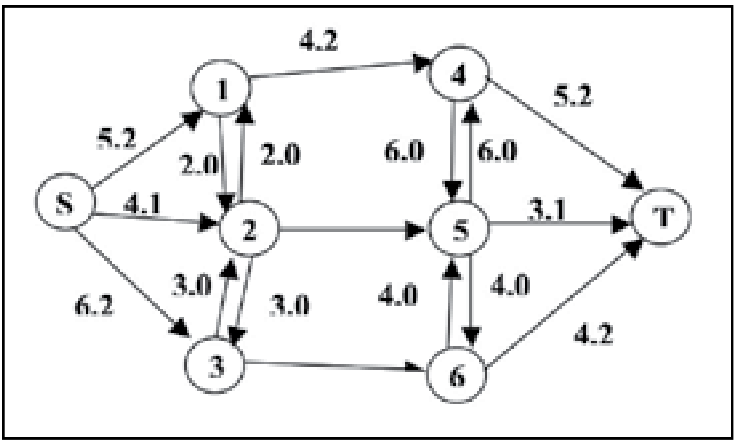
Marcado3
E(t)=1
Cambio de flujo (3)→

F(x4,t)=6+1=7
F(s:x1)=6+1=7

F(x4,x3)=3-1=2 F(x1,x3)=5+1=6

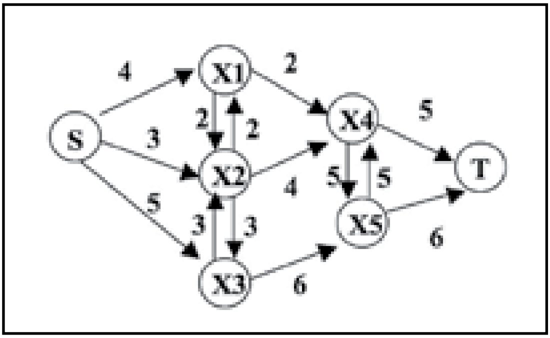
Marcado 4
Se obtiene un corte
X={S,X_1,X_2} Vértices marcados
X'={X_3,X_4,t} Vértices no marcados
F(X, X´)=f(x_1,x_3)+f(x_2,x_4)=6+6=12
F(X', X)=φ
Flujo máximo =12
Comprobación.
De S sale 12=6+6.
A T llega 12=5+7.

Ejercicios de Flujo Máximo Propuestos
Ejercicios 1:
Dada las siguientes redes, encuentre el flujo máximo desde el nodo S hasta el T.



Portada

Ejercicio 2:



En el problema de Flujo Máximo se encuentran los Flujos entre el vértice inicial y final en Redes orientadas, en donde no se considera el costo en cada arco; en la Teoría de Redes se tienen bien delimitados los vértices de orígenes, de destino e intermediarios. Cuando se quiere la generalización de este método, en donde los vértices puedan ser de cualquier tipo y que se considere el costo, entonces le llamamos método del Flujo Máximo de Costo Mínimo, según la Teoría de Redes y Problema de Trasbordo según la Programación del Transporte; este método de Transporte con Trasbordo se analizará en el Tema de Transporte como Programación Lineal.

El Problema del Agente Viajero: Problema TSP

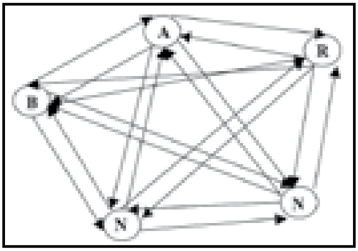
Agente Viajero

Ejercicios Resueltos:

Una compañía de pinturas produce cinco colores al mes. Al cambiar de uno a otro color, la máquina mezcladora debe limpiarse y prepararse para el siguiente color. Los tiempos entre cambios se muestran en la siguiente tabla.

COLOR	BLANCO	AMARILLO	NARANJA	ROJO	NEGRO
BLANCO	-	150	120	100	110
AMARILLO	120	-	110	90	100
NARANJA	200	120	-	80	100
ROJO	220	190	100	-	90
NEGRO	300	210	180	13	-

Gráfica:



Solución: Heurística de construcción de un viaje.
Situación inicial: un ciclo con dos nodos N $\rightleftarrows$ R Valor 180
Iteración 1: Insertar un nuevo nodo en el ciclo N-R-N
Ejemplo 15 (del Blanco, ¿dónde ubicarlo?):
N-B-R-N ó N-R-B-N

Entonces:
a) N-B-R-N →valor=400
b) N-R-B-N →valor=420
Por tanto, se escoge la opción a).
Veamos todas las posibilidades

NODO SELECC.	INSERTADO ENTRE	NUEVO CICLO	TIEMPO TOTAL
B (BLANCO)	NyR	N-B-R-N	400
	RyN	N-R-B-N	420
A (AMARILLO)	NyR	N-A-R-N	360
	RyN	N-R-A-N	380
NEGRO	NyR	N-Negro-R-N	330
	RyN	N-R-Negro-N	350

Iteración 2
Elegir otro nodo que visitar entre B y A.
Veamos la tabla

NODO SELECC.	INSERTADO ENTRE	NUEVO CICLO	TIEMPO TOTAL
B	Neg y B	N-B-Neg-R-N	540
	Neg y R	N-Neg-B-R-N	600
	R y N	N-Neg-R-B-N	570
A	N y Neg	N-A-Neg-R-N	500
	Neg y R	N-Neg-A-R-N	500
	R y N	N-Neg-R-A-N	530

Iteración 3
Falta por incluir el nodo Blanco que puede insertarse entre los nodos:
- N-A
- A-Neg
- Neg-R
- R-N

NODO SELECC.	INSERTADO ENTRE	NUEVO CICLO	TIEMPO TOTAL
B	N y A	N-B-A-Neg-R-N	680
	A y Neg	N-A-B-Neg-R-N	680
	Neg y R	N-A-Neg-B-R-N	720
	R y N	N-A-Neg-R-B-N	740

La solución dada por el Winqsb es:
B-R-Neg-N-A-B =710 por Heurística utilizando la estrategia del vecino más cercano.
B-N-R-Neg-A-B=670 por el método "nombre".

Ejercicios Propuestos del Agente Viajero:

Ejercicio 1:

Se tiene una empresa que da servicio de renta de equipos a varias ciudades y en la tabla se da el costo de envío de una máquina a cada ciudad. Encuentre un plan de distribución diario o que las máquinas regresen al centro de partida.

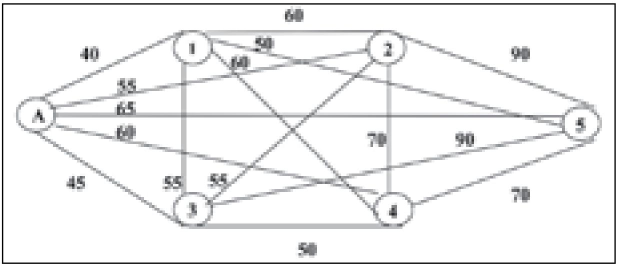
CIUDADES	CENTRO	A	B	C
CENTRO	-	1.600	1.800	2.500
A	1.600	-	900	100
B	1.800	1.800	-	1.400
C	2.500	1.600	400	-

Ejercicio Resuelto:

Un agente viajero de una compañía de llantas tiene un almacén y cinco tiendas a las cuales abastecer, las entregas se hacen mediante un camión, y en la tabla se dan los tiempos, en minutos de manejo entre cualesquiera de las dos tiendas y el almacén central. Se quiere hacer todas las entregas de forma que no superen las 8 horas.

	ALMACÉN	1	2	3	4	5
ALMACÉN	-	40	55	45	60	65
TIENDA 1		-	60	55	60	50
TIENDA 2			-	55	70	90
TIENDA 3				-	50	90
TIENDA 4					-	70
TIENDA 5						-

Grafo no dirigido

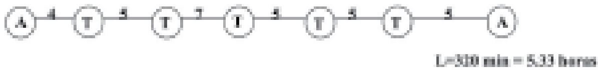


El objetivo es salir del almacén, visitar todas y cada una de las tiendas y regresar al punto de partida en el menor tiempo posible (menos de 8 horas). Es decir:

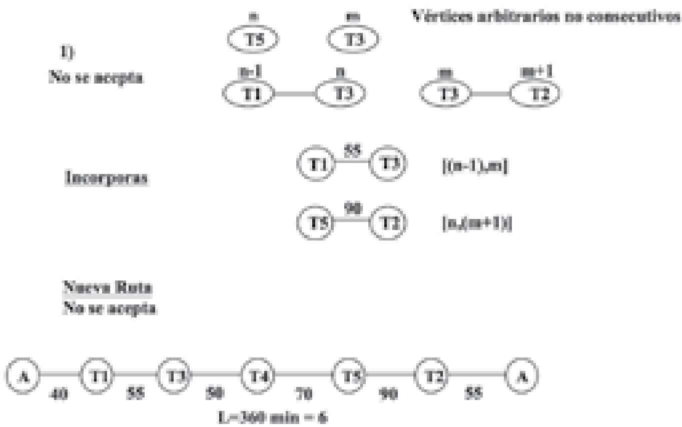
- El almacén es el nodo inicial y final de cada ruta.
- Todos y cada uno de los nodos deben ser visitadas exactamente una vez.
- El tiempo total de manejo sea lo más pequeño posible.

Solución inicial

a) Vecino más cercano.

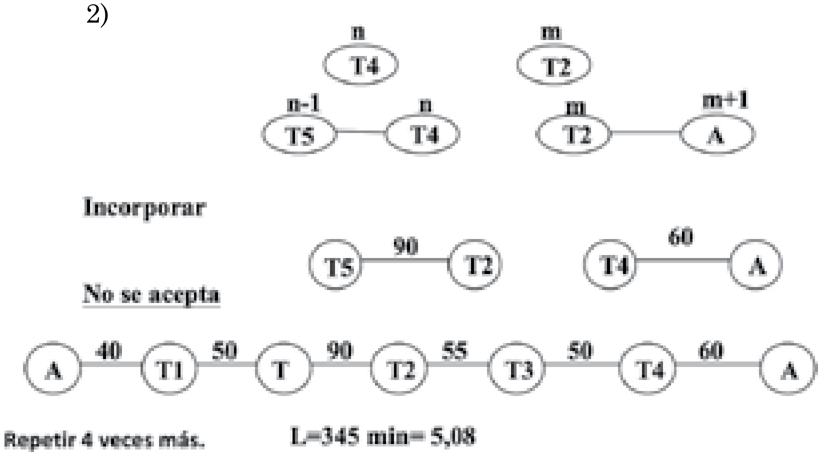


b) Intercambio de aristas



Portada

2)



Modelo de Cheapest. Inserción Heurística

Heurística de construcción del viaje: construye un ciclo incluyendo secuencialmente un nodo a la vez hasta que se usan todos los nodos.

- Comenzar con un ciclo de dos nodos.
- Seleccionar un nuevo nodo para incluirlo.
- Determinar donde insertar ese nodo seleccionado en el ciclo actual.

Existen muchas formas diferentes de elegir los dos nodos iniciales y muchas reglas para seleccionar e insertar un nuevo nodo.

Formalización de la Heurística

Paso 0: Inicialización. Forme un ciclo entre los dos nodos cuyo costo total sea lo más pequeño posible.

Paso 1: Evaluación. Si todos los nodos se incluyen en el ciclo actual, deténgase. De otra manera, para cada nodo que no esté en el ciclo actual, determine el mejor lugar para insertarlo y calcule el costo total del ciclo resultante.

Paso 2: Selección e Inserción. Entre todos los nodos evaluados en el paso 1, elija uno que produzca un nuevo ciclo de mínimo coste total cuando se inserta en su mejor lugar. Inserte ese nodo en ese lugar y establezca el nuevo ciclo. Regresar al paso 1.

Capítulo 1
Capítulo 2
Capítulo 3

3

PROGRAMACIÓN DEL TRANSPORTE CON TRASBORDO

Portada

Capítulo 3. Programación del Transporte con Trasbordo

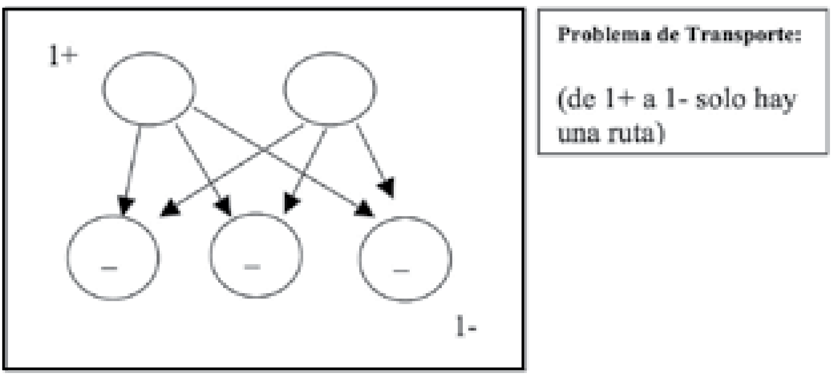
3.1. Formulación del Problema de Transporte con Transbordo-Problema de Flujo Máximo de Costo Mínimo (Como Problema de Redes)

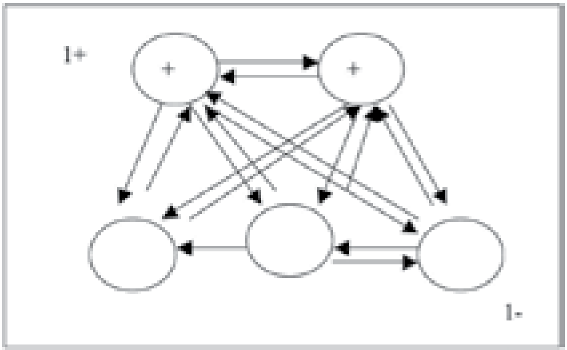
Uno de los requerimientos del problema de transporte es que se conozca de antemano la forma en que se van a distribuir las unidades de cada origen i a cada destino j para poder determinar el costo por unidad c_{ij}. No obstante, en ocasiones no es evidente cuál es el mejor medio de distribución, pues existe la posibilidad de transbordos en los que los embarques pasarían por puntos de transferencias intermedios (que a su vez pueden ser orígenes o destinos).

Lo que se pretende ahora es obtener las cantidades que han de mandarse de cada origen a cada destino y la ruta a seguir en cada embarque, con el objetivo de minimizar los costos totales de transporte.

Característica de este problema de transbordo es que cada origen puede enviar el producto no solamente a los destinos, sino también a los otros orígenes, y a la vez cada destino puede recibir el producto no solamente de los orígenes, sino de los otros destinos.

Ejemplo 16:





Problema de transporte con Transbordo.-
(de 1+ a 1- existen muchas rutas)

Sean ahora i = 1,2,..., m (fuentes) j = m+1, m+2,..., m+n (destinos)

X_{ij} .- unidades a transportar desde i hasta j

$$X_{ij} >= 0 \qquad i = 1, 2 ...m+n$$

Cij.- costo de transporte desde i hasta j $\sum c_{ij}$

Orígenes.

$\sum x_{ij} = a_i + t_i \qquad (i = 1,\ldots, m)$

t_i = unidades trasbordadas desde i.

La cantidad total del producto que sale de i es igual a lo existente en i más la trasbordada desde i.
Destinos.

$\sum x_{ij} = b_j + t_j \qquad (i \neq j)$

t_j = unidades trasbordadas

La cantidad total del producto que llega a j es igual a la demanda de j más lo trasbordado desde j.

Portada

1) Trasbordo en destinos

$\sum x_{ij} = t_i$ $(i \neq j)$

$i = m+1, m+2,\ldots, m+n$

Lo que arriba a un destino es igual a lo que el destino trasborda.

2) Trasbordo de orígenes

$\sum x_{ij} = t_j$ $j = 1,\ldots, m$

Lo que arriba es un origen es igual a lo que el origen trasborda.

La Función objetivo será:

$\text{Min } Z = \sum\sum c_{ij}\, x_{ij} + \sum c_i\, t_i$

Donde c_i = costo unitario del trasbordo desde i.

El modelo planteado resulta en extremo difícil para entender los t_i como incógnitas.
Asignemos un valor constante a t_i y se nos facilitará mucho el cálculo.

Sea to = $\sum a_i$ la cantidad cota superior de t_i.

Tabla de transporte con trasbordo

		ORÍGENES	DESTINOS	
		123.....m	m+1 m+2......m+n	
ORÍGENES	1 2 . m	Trasbordo origen origen	Cij	al+to . . am+to
DESTINOS	m+1 m+2 . m+n	cij	Trasbordo destino destino	To
		To	b1+to+....+bm+to	

Portada

El problema de P.L con trasbordo quedaría:

Variables.

X_{ij}.- Cantidad de prod. enviado de i a j. (i, j = i, m+n)
Restricciones de Origen.

$\sum X_{ij} = a_i + to$ $i = i, \ldots, m$
$\sum X_{ij} = to$ $i = m+1, \ldots, m+n$
$i \neq j$

Restricciones de Destino.

$\sum X_{ij} = to$ $j = 1, \ldots, m$
$\sum X_{ij} = b_j + to$ $j = m+1, m+n$
$i \neq j$

Función Objetivo.

$\text{Min } Z = \sum \sum c_{ij}\, x_{ij}$ Modelo con m+n orígenes y destinos.

Ejemplo 17 (de Transporte con Trasbordo):

Se tienen dos fábricas que suministran envases a tres establecimientos para que envasen sus productos.

	E1	E2	E3	Ofertas
F1	20	14	8	300
F2	10	17	15	200
Demandas	150	250	100	

Encuentre el plan óptimo de transportación si se permite el trasbordo entre fábricas y entre empresas con costos unitarios.

	F1	F2
F1	0	1
F2	2	0

	E1	E2	E3
E1	0	1	2
E2	3	0	1
E3	1	1	0

Solución.

	F1	F2	E1	E2	E3	
F1	0	1	20	14	8	800
F2	2	0	10	17	15	700
E1			0	1	2	500
E2			3	0	1	500
E3			1	1	0	500
	500	500	650	750	600	500

To = ai = bj = 500

Xij = cantidad de envases suministrados desde la fábrica i hasta el establecimiento j.

I = 1, 5

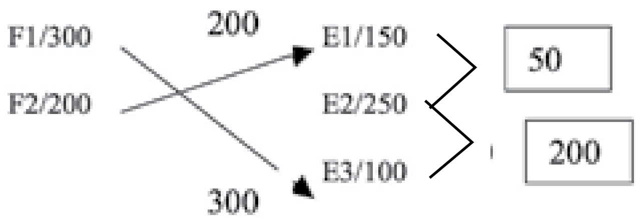
J = 1, 5

$$
\begin{aligned}
X_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} &= 800\\
X_{21}+x_{23}+x_{24}+x_{25} &= 700\\
X_{34}+x_{35} &= 500\\
X_{43}+x_{45} &= 500\\
X_{51}+x_{52} &= 500\\
X_{21}+x_{12} &= 500\\
X_{13}+x_{23}+x_{43}+x_{53} &= 650\\
X_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{54} &= 750\\
X_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45} &= 600
\end{aligned}
$$

Mín $Z = X_{12} + 20X_{13} + 141X_{14}+8X_{15}+2X_{21}+10X_{23}+17X_{24}+15X_{25}+X_{34}+2X_{35} +3X_{43}+X_{45}+X_{53}+X_{54}$

Solución óptima.

$X_{15} = 300$
$X_{23} = 200$
$X_{34} = 50$
$X_{54} = 200$



Mín Z = 4650

3.2. Redes: Problema del Flujo Máximo

Considere una red dirigida y conexa que tiene un solo nodo fuente y un solo nodo destino, y el resto son nodos de trasbordo. De la capacidad de los arcos, el objetivo es determinar el patrón factible que fluye a través de la red que maximiza el flujo total, desde el nodo fuente al nodo destino.

Portada

X_{ij}.- Flujo a través del arco i, j.

Función Objetivo:

Máx $Z = \sum\sum x_{ij}$

Restricciones:

$\sum X_{ij} - \sum x_{ji} = b_i$, $i = 1,\ldots, n$

donde $\sum x_{ij}$ es lo que sale y $\sum x_{ji}$ es lo que entra y

$b_i > 0$ s_i i es nodo fuente $(i = 1)$
$b_i = 0$ s_i i es nodo trasbordo
$b_i < 0$ s_i i es nodo demanda $(i = n)$
b_i son los flujos netos generados en cada nodo y son datos.
Capacidades:
$0 <= x_i <= u_{ij}$ Flujo (i, j)

u_{ij} .- Capacidad del flujo (i, j)
(dato)

Caso particular:

Si V es el flujo estático desde el nodo inicial hasta el nodo final.

$X_{ij} >= 0$ flujo de i a j

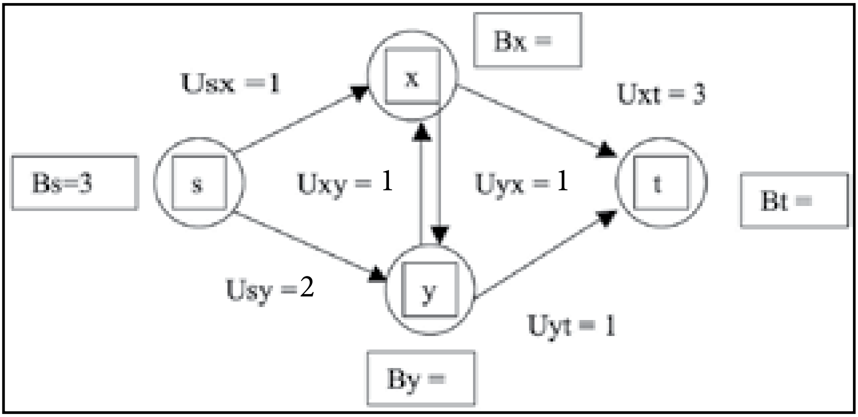
Máx $Z = \sum x_{ij}$

$\sum X_{ij} - \sum x_{ji} = b_i, =$ V s_i $i = 1$ (nodo de inicio)
0 s_i $i \neq 1$ e $i \neq n$
-V s_i $i = n$ (nodo final)

$x_{ij} <= u_{ij}$

Resuelva el problema de Flujo Máximo de s a t:

Portada



3.3. Redes: Problema del Flujo Máximo de Costo Mínimo (Trasbordo)

Al igual que el problema del flujo máximo, toma en cuenta un flujo a través de una red con capacidades limitadas en sus arcos. Al igual que el problema de la ruta más corta considera un costo (o distancia) para el flujo a través de un arco. Al igual que el problema de transporte o el problema de asignación, puede manejar varios orígenes (nodos fuentes) y varios destinos (nodos demanda) para el flujo, también con costos asociados. Al igual que el problema de trasbordo, puede considerar varios puntos de conexión (nodos de trasbordo) entre los orígenes y los destinos para este flujo. De hecho, estos problemas estudiados son casos particulares del problema de flujo máximo de costo mínimo.

Costo Mínimo
Flujo Máximo
Transporte (origen, destino)→Flujo Máx. Costo Mín. →Se puede resolver por el Método

Simplex de Redes.
Asignación (origen, destino)
Trasbordo (conexiones)

Portada

Definición del problema:

Red conexa, dirigida (orientada) con n nodos (incluye al menos 1 nodo origen y un nodo destino).

Variables de decisión:

x_{ij} = flujo a través del arco i - j
c_{ij} = costo unitario de flujo i - j
u_{ij} = capacidad del arco i - j
b_j = flujo neto generado en l nodo i

bi depende de la naturaleza del nodo i.

$b_i > 0$ si nodo i fuente
$b_i < 0$ si nodo i demanda
$b_i = 0$ si i nodo de transbordo

El objetivo es minimizar el costo total de enviar los recursos disponibles a través de la red para satisfacer la demanda dada.

Mín $Z = \sum\sum c_{ij}\, x_{ij}$

Sujeta a:

$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = b_i$

donde $\sum x_{ij}$ es lo que sale y $\sum x_{ji}$ es lo que entra, para cada i.

$0 <= x_{ij} <= u_{ij}$ para cada arco i - j

En caso de ser necesario tener cota inferior $\sum_{ij} > 0$ para el flujo del arco i - j se hace una traslación de variables $x'_{ij} = x_{ij} - \sum_{ij}$ y se sustituye en el modelo

$x_{ij} = x'_{ij} + \sum_{ij}$

No se garantiza la solución factible en todos los casos.

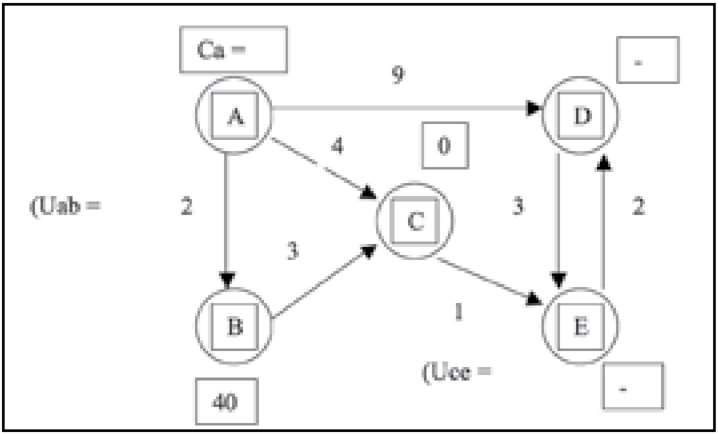
Una propiedad de solución factible es:

$\sum b_i = 0$ (condición necesaria para la factibilidad del problema)

En caso de suceder que $b_i \neq 0$ se agregará un nodo fuente ficticio o un nodo demanda ficticio con costo cero.

En general x_{ij} son enteros dado que b_{ij}, u_{ij} son siempre enteros.

Ejemplo 18:



A y B son nodos orígenes (fuentes)
D y E son nodos destino (demandas)
C es nodo trasbordo

Flujo Neto Generado = 90
Todos los arcos, excepto 2, tienen flujo capacidades que exceden el Flujo Total Generado (90). Estos arcos son; x_{ij}: $u_{ij} = 0$, las excepciones $u_{ab} = 0$ y $u_{ce} = 80$.

$$\text{Mín } z = 2x_{ab} + 4x_{ac} + 9x_{ad} + 3x_{bc} + x_{ce} + 2x_{de} + 2x_{ed}$$

$$\begin{aligned}
x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} &= 50 \\
-x_{ab} + x_{bc} &= 40 \\
-x_{ac} - x_{bc} + x_{ce} &= 0 \\
-x_{ad} + x_{de} - x_{ed} &= -30 \\
-x_{ce} - x_{de} + x_{ed} &= -60
\end{aligned}$$

S.a.:
$x_{ab} <= 10$
$x_{ce} <= 80$
$x_{ij} >= 0$

BIBLIOGRAFÍA

Portada

Bibliografía

Adtga, S. y Glassey, C. R. (1991). "*Object-Oriented Simulation To Support Research In Manufacturing Systems*." The International Journal Of Production Research, 29(12): 2529-2542.

Álvarez, M. (1987). "*Modelos Económicos Matemáticos Ii*." Ciudad de La Habana: Editorial IPJAE.

Applegate, D. L., et al. (2011). *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study: A Computational Study*. Princeton: Princeton University Press.

Aquilano, N. J., yChase, R. B. (1995). *Dirección y administración de la producción y de las operaciones*. México DF: McGraw-Hill.

Bazaraa, M. S., et al. (2011). *Linear Programming and Network Flows*. Wiley.

Beasley, J. E. "*Guidance On Formulating Lp Problems*." Acceso el 17 de junio de 2005, disponible en: http://People.Brunel.Ac.Uk/~Mastjjb/Jeb/Or/Lp.Html

Belenky, A. S. (2013). *Operations Research In Transportation Systems: Ideas And Schemes Of Optimization Methods For Strategic Planning And Operations Management*. Springer.

Bossel, H. (2013). *Modeling And Simulation*. Springer-Verlag.

Cook, W. (2012). *In Pursuit Of The Traveling Salesman: Mathematics At The Limits Of Computation*. Princeton: Princeton University Press.

Cortés Cortés, M. E. (1999). *Introducción a la investigación de operaciones*. Guayaquil: Ed. Universidad de Guayaquil.

Cortés, M. (2011). *Modelación Matemática Aplicada*. Riobamba: Universidad Interamericana del Ecuador.

Cortés, M., et al. (2005). *Aplicaciones de la modelación matemática a la administración y la economía*. Mérida, México: Universidad Autónoma del Carmen.

Chiang, C. (1987). *Métodos Fundamentales De Economía Matemática*. México DF: McGraw-Hill.

Eppen, G. D. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa: construcción de modelos para la toma de decisiones con hojas de cálculo electrónicas*. Pearson Educación.

Ficken, F. A. (2015). *The Simplex Method Of Linear Programming*. Dover Publications.

Garriga Garzón, F. (2012). “*Problemas Resueltos De Programación Lineal*.” Omniascience Scholar.

Gass, S. I., y Harris, C. M. (2012). *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Springer Us.

González, Á. L. (2010). *Manual práctico de investigación de operaciones*. 3a. ed. Universidad del Norte.

Guarnieri, P. (2015). *Decision Models in Engineering and Management*. Springer International Publishing.

Heizer, J. (1998). *Dirección de la producción, decisiones estratégicas*. Editorial Prentice Hall.

Hernández, A. D., et al. (2013). *Optimización. Casos Prácticos*. Madrid: Uned.

Hillier F. S., y Lieberman, G. J. (1974). *Introduction To Operations Research*. San Francisco: Holden-Day.

Insua, S. R., yInsua, M. J. R. (1989). *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema Universidad.

Kamlesh, M. (1996). *Investigación de operaciones, el arte de la toma de decisiones*. México DF: Prentice Hall.

Kaufmann, A. (1981). *Métodos y modelos de la investigación de operaciones*. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Kohler, H. (1994). *Statistics For Business And Economics*. Addison-Wesley.

Kolman, B., et al. (2014). *Elementary Linear Programming With Applications*. Elsevier Science.

Linear Programming. (2014, 3/4/2014). "*What Is A Basic Feasible Solution In Linear Programming*." Acceso el 18 de junio de 2015, disponible en: http://www.Linearprogramming.Info/What-Is-A-Basic-Feasible-Solution-In-Linear-Programming/

Martínez, I., et al. (2014). *Investigación de operaciones: serie universitaria patria.*

Mateo, J. R. S. C. (2015). *Management Science, Operations Research And Project Management: Modelling, Evaluation, Scheduling, Monitoring*. Ashgate Publishing Limited.

Monks, J. G. (1985). *Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Operations Management*. McGraw-Hill.

Murty, K. G. (2014). *Case Studies In Operations Research: Applications Of Optimal Decision Making*. Springer New York.

Navarrete, E., y Rodríguez, A. (1995). *Gestión y calidad del mantenimiento*. La Habana: Ed. Ispae.

Newnan, D. G. (1983). *Engineering Economic Analysis*. San José: McGraw-Hill.

Pilar, F. (1988). *Programación Matemática I*. La Haban:, Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo.

Pilar, F. (1988). *Programación Matemática II*. La Habana: Combinado Poligráfico Evelio Rodríguez Curbelo.

Portela Silva, J. And K. A. V (1998). *Modelos Matemáticos I*. La Habana: Pueblo y Educación.

Portela Silva, J. And K. A. V (1998). *Modelos Matemáticos II*. La Habana: Pueblo y Educación.

Portuondo Pichardo, F. (1985). *Economía de empresas industriales*. La Habana: Pueblo y Educación.

Portada

Roscoe, D., y Mckeown, P. G. (1986). *Modelos cuantitativos para administración*. México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schrijver, A. (2012). "*On The History Of The Shortest Path Problem*." Documenta Mathematica: 155-167.

Schroeder, R. G. (1985). *Operations Management: Decision Making In The Operations Function*. McgGaw-Hill.

Schroeder, R. G. (1990). *Administración de operaciones*. México DF: McGraw-Hill.

Singer, M. (2014). *Una práctica teoría de la optimización lineal: datos, modelos y decisiones*. Ediciones Uc.

Srinivasan, R. (2014). *Strategic Business Decisions: A Quantitative Approach*. Springer.

Trujillo, J. M., y Díaz, J. A. (1988). *Métodos Económicos-Matemáticos I*. La Habana: Enpes.

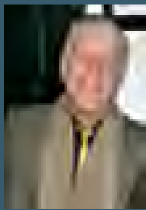
Trujillo, J. M., y Díaz, J. A. (1988). *Métodos Económicos-Matemáticos II*. La Habana: Enpes.

Watson, C. G.-H., y Gallagher, C. A. (1982). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*. México DF: McGraw-Hill.

Wayne, W. (1994). *Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos*. México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Winston, W., y Albright, S. (2015). *Practical Management Science*. Cengage Learning.

Zeleny, M. (2012). *Linear Multiobjective Programming*. Springer Berlin Heidelberg.



**MANUEL E.
CORTÉS CORTÉS**

Estudio Matemática en la Universidad Central de las Villas. 1966 - 1971. Cuba.

Profesor universitario desde 1977. Universidad de Cienfuegos. Cuba.
Concluye Doctorado en Ciencias Económica (PhD) en la Universidad Nacional de Ucrania. 1986 – 1989. Ucrania.

Profesor Consultante de la Educación Superior de Cuba, 2012.
Reconocimiento Nacional como profesor de la Educación Superior.

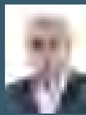
Miembro del Consejo Asesor Provincial de la Academia de Ciencias de la Provincia de Cienfuegos.- Presidente de la Comisión de Informática y Automatización de la Academia de Ciencias de la Provincia de Cienfuegos. 1996 - 2014.

Presidente de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación en la Provincia de Cienfuegos: 2000-2009. Miembro de la Directiva Nacional de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. 2007 - 2015 Miembro del Claustro del Doctorado Tutelar de Ciencias Pedagógicas de la Universidad de Cienfuegos. 2011.
Coordinador de la Maestría en Matemática Aplicada desde 1990 - 2015.

Profesor de Modelación y Estadística Matemática, Métodos Cuantitativos, Algebra Lineal, Metodología de la Investigación entre otras en pregrado y postgrado. Ha impartido materias en pregrado y postgrado en Cuba, Angola, México y Ecuador.

En los últimos cinco años ha publicado: 12 artículos científicos en revistas referenciadas.
Dirección Científica de Tesis de Pregrado. Maestrías y Doctorados (PhD).

Autor de los siguientes libros: En Ecuador Introducción a la Investigación de Operaciones, Modelación Matemática Aplicada, en México Generalidades de la Metodología de la Investigación, Modelos Matemáticos Aplicados a la Administración y la Economía. Coautor del libro Currículum, innovación pedagógica y formación, México.



**MILTON R.
MARIDUEÑA ARROYAVE**

Ingeniero en Computación. Escuela Superior Politécnica del Litoral - ESPOL. 1997. Ecuador.

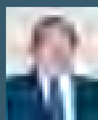
Magíster en Docencia en Universitaria e Investigación Educativa. Universidad de Guayaquil. 2002. Ecuador.

PhD. en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez". 2014. Cuba.
Candidato PhD en Ciencias Técnicas Universidad de Ciencias Informáticas 2016. Cuba.

Docente en la ESPOL. 1997 - 2013.
Docente Universidad de Guayaquil - UG. Desde 1998.

Coordinador Académico de la Carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales. UG. 2000 - 2001.

Director del Departamento de investigaciones y proyectos académicos - DIPA. UG. Desde 2014.



**WASHINGTON C.
MARTÍNEZ GARCÍA**

Master en Ingeniería Oceánica, Especialización en Transporte Marítimo – UFRJ, Brasil. Master en Ingeniería Civil, Especialización en Transporte – University of Miami - USA. Doctor en Ciencias en Ingeniería Oceánica, Especialización en Logística y Transporte – UFRJ, Brasil

Docencia en la Escuela Superior Politécnica del Litoral 1980 - 2015 en pregrado y posgrado en FCMBOR y FCSH. Profesor en la Universidad del Pacífico y Universidad de Guayaquil. Escuela de Formación de Oficiales de Transito - Comisión de Tránsito del Guayas.

Portada

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL TRANSPORTE

La Programación del Transporte es una técnica muy difundida en nuestros días, en ella se logra hacer distribuciones o entregas óptimas desde empresas productivas hasta empresas de comercialización. El problema se plantea aquí como un caso particular de la Programación Lineal, de forma que se satisfagan las demandas, se cumplan los planes de entrega de las ofertas y se minimicen los costos de la transportación.

En el libro se trata el tema de la Programación Lineal en forma general y la Programación del Transporte en particular, se proponen los temas en una forma metodológica y práctica para que el lector vea de forma inmediata el problema, la aplicación, la solución y el análisis de la misma. En lo referente a la Programación Lineal se abarca.
Primero: la formulación del problema, la definición de las variables, la definición de las restricciones y la función objetivo a ser optimizada.
Segundo: los métodos de solución, la fórmula de cálculo, sus pasos y su operatoria en general, la interpretación de los resultados.
Tercero: los métodos de planteamiento y solución más modernos de la Programación Lineal Multiobjetivo.
Cuarto: se plantean ejercicios resueltos y propuestos.

En lo relativo a la Programación del Transporte se trata el problema del Transporte como caso particular de la Programación Lineal; analizando las técnicas de solución inicial y de solución óptima de los modelos de transporte. Se estudian los modelos de la Teoría de Redes, el Flujo Máximo y el Flujo Máximo de Costo Mínimo, se resuelven los problemas de transporte con la teoría de redes con el llamado Modelo de Transporte con trasbordo. Se dan ejemplos resueltos y propuestos.

UNIVERSIDAD DE GUAYAQUIL

ISBN 978-9978-59-112-3

9 789978 591123